Twierdzenie Poincarégo i jego konsekwencje

Mateusz Kula

7 marca 2024

Notatki te spisane zostały na podstawie artykułu [1] oraz książki [2, s. 125–134] prof. Władysława Kulpy.

1 Pojęcia wstępne

W tej sekcji zakładamy, że całą przestrzenią jest zbiór $\mathbb{R}^n$, gdzie $n \geqslant 2$ jest ustalone. Przez $(e_1, \dots, e_n)$ oznaczamy bazę kanoniczną przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Z kolei dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$ funkcja $\pi_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ oznacza rzutowanie kanoniczne.

Kostką kombinatoryczną[1] o wierzchołku początkowym $v \in \mathbb{R}^n$ i krawędzi $\varepsilon > 0$ nazywamy zbiór

$$C(v, \varepsilon) := v + \{0, \varepsilon\}^n.$$

Sympleksem kombinatorycznym o wierzchołku początkowym $v \in \mathbb{R}^n$ i krawędzi $\varepsilon > 0$ związanym z permutacją $\alpha \colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ nazywamy zbiór

$$S(v, \varepsilon, \alpha) := \{z_0, z_1, \dots, z_n\},$$

gdzie ciąg $(z_0, z_1, \dots z_n)$ jest określony rekurencyjnie przez wzory

$$z_0 = v \text{ oraz } z_i = z_{i-1} + \varepsilon \cdot e_{\alpha(i)} \text{ dla } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Obserwacja 1. *Kostka kombinatoryczna jednoznacznie wyznacza wierzchołek początkowy oraz krawędź.*

[1] Autor pozwolił sobie trochę zmienić oryginalne nazewnictwo. Oryginalnie *kostka kombinatoryczna* oznaczała obiekt, który w tej notatce nazywa się *siatką kombinatoryczną*.

Dowód. Jeśli $C = C(v, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n$ jest kostką kombinatoryczną, to

$$\varepsilon = \min\{\|x - y\| \colon x, y \in C \text{ oraz } x \neq y\}$$

oraz dla wszystkich $i \in \{1, \dots, n\}$ zachodzi

$$\pi_i(v) = \min \pi_i[C].$$

□

Obserwacja 2. *Sympleks kombinatoryczny jednoznacznie wyznacza wierzchołek początkowy, krawędź oraz związaną z nim permutację.*

Dowód. Niech $S = S(v, \varepsilon, \alpha)$ będzie sympleksem kombinatorycznym oraz $(z_0, z_1, \dots z_n)$ będzie ciągiem określonym tak jak w definicji. Ponieważ każdy sympleks kombinatoryczny jest zawarty w dokładnie jednej kostce kombinatorycznej $C(v, \varepsilon)$, a kostka wyznacza jednoznacznie wierzchołek początkowy oraz krawędź, więc wierzchołek v oraz krawędź ε są wyznaczone jednoznacznie. Ponieważ dla każdego $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ moc zbioru $\{k \in \{1, \dots, n\} \colon \pi_k(z_i) = v_k\}$ wynosi $n - i$, więc ciąg $(z_0, z_1, \dots z_n)$ oraz permutacja α są wyznaczone jednoznacznie. □

Ścianami kostki kombinatorycznej $C = C(v, \varepsilon)$ o indeksie $i \in \{1, \dots, n\}$ nazywamy zbiory

$$C_i^- := \{x \in C \colon \pi_i(x) = \pi_i(v)\} \text{ oraz } C_i^+ := \{x \in C \colon \pi_i(x) = \pi_i(v) + \varepsilon\}.$$

Ścianą o indeksie $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ sympleksu kombinatorycznego $S = \{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ nazywamy zbiór $S_i := S \setminus \{z_i\}$.

Obserwacja 3. *Ściana kostki kombinatorycznej jest ścianą dokładnie dwóch kostek kombinatorycznych.*

Dowód. Niech $C = C(v, \varepsilon)$ będzie kostką kombinatoryczną, a C_i^δ ścianą o indeksie $i \in \{1, \dots, n\}$ oraz $\delta \in \{+, -\}$. Ponieważ rzut $\pi_j[C_i^\delta]$ ma albo 2 elementy, gdy $j \neq i$, albo 1 element, gdy $j = i$, więc indeks i jest wyznaczony jednoznacznie (tzn. taki sam dla wszystkich kostek kombinatorycznych, których C_i^δ jest ścianą). Ponieważ dla wszystkich $j \neq i$ jest

$$\pi_j[C_i^\delta] = \{\pi_j(v), \pi_j(v) + \varepsilon\},$$

więc krawędź ε oraz wszystkie współrzędne wierzchołka v poza i-tą są wyznaczone jednoznacznie. Z kolei ponieważ

$$\pi_i[C_i^\delta] = \begin{cases} \{\pi_i(v)\}, & \text{gdy } \delta = -, \\ \{\pi_i(v) + \varepsilon\}, & \text{gdy } \delta = +, \end{cases}$$

więc jedyną inną niż C kostką kombinatoryczną, której C_i^δ jest ścianą, jest $C(v+\varepsilon\cdot e_i,\varepsilon)$, gdy $\delta=+$, oraz $C(v-\varepsilon\cdot e_i,\varepsilon)$, gdy $\delta=-$. □

Obserwacja 4. *Ściana sympleksu kombinatorycznego jest ścianą dokładnie dwóch sympleksów kombinatorycznych.*

Dowód. Niech $W=\{z_0,z_1,\ldots,z_n\}\setminus\{z_i\}$ będzie ścianą sympleksu kombinatorycznego $S=S(v,\varepsilon,\alpha)$, przy czym ciąg $(z_0,z_1,\ldots,z_n)$ jest taki jak w definicji. Niech C będzie jedyną kostką kombinatoryczną zawierającą S. Rozważmy przypadki:

I. $i\notin\{0,n\}$. Ponieważ $z_0=v$ oraz $z_n=v+\varepsilon\cdot\mathbf{1}$, więc dla każdego $k\in\{1,\ldots,n\}$ zachodzi

$$\{\pi_k(v),\pi_k(v)+\varepsilon\}\subseteq\pi_k[W]\subseteq\pi_k[S]\subseteq\pi_k[C].$$

Stąd kostka C jest wyznaczona jednoznacznie (tzn. taka sama dla wszystkich sympleksów, których W jest ścianą). Oznaczmy

$$R(w):=\{k\in\{1,\ldots,n\}\colon \pi_k(w)=\pi_k(v)\}.$$

Dla każdego $m\in\{0,1,\ldots n\}$ moc zbioru $R(z_m)$ jest równa $n-m$. Stąd

$$\{0,1,\ldots,n\}\setminus\{n-i\}=\{|R(w)|\colon w\in W\}.$$

Oznacza to, że każdy sympleks kombinatoryczny, którego W jest ścianą, powstaje przez usunięcie wyrazu o indeksie i. Jedynym innym niż S sympleksem, którego W jest ścianą, jest więc $S'=W\cup\{z_{i-1}+\varepsilon\cdot e_{\alpha(i+1)}\}$.

II. $i=0$. Wówczas $W\subseteq C^+_{\alpha(1)}$. Niech $W\subseteq S'\subseteq C'$, gdzie S' jest sympleksem kombinatorycznym (innym niż S) zawartym w kostce C' takim, że ściana W powstaje z S' przez usunięcie pewnego elementu. Wówczas W zawiera się w pewnej ścianie D kostki C' o indeksie $\alpha(1)$ (w przeciwnym razie W nie mógłby być zawarty w ścianie $C^+_{\alpha(1)}$). Niech $\pi\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n-1}$ będzie rzutowaniem, które pomija współrzędną $\alpha(1)$. Wówczas $\pi[W]$ jest sympleksem kombinatorycznym (wymiaru $n-1$) zawartym w kostce kombinatorycznej $\pi[C^+_{\alpha(1)}]$ oraz w kostce $\pi[D]$. Stąd $D=C^+_{\alpha(1)}$, a ponieważ każda ściana kostki kombinatorycznej jest ścianą dokładnie dwóch kostek, dostajemy $C'=C(v+\varepsilon\cdot e_{\alpha(1)},\varepsilon)$ oraz

$$S'=\{z_1,\ldots,z_n,z_n+\varepsilon\cdot e_{\alpha(1)}\}=S(z_1,\varepsilon,\beta),$$

gdzie $\beta=(\alpha(2),\ldots,\alpha(n),\alpha(1))$.

III. $i = n$. Analogicznie jak w przypadku II stwierdzamy, że jedynym innym niż S sympleksem kombinatorycznym, którego W jest ścianą, jest $S' = \{z_0 - \varepsilon \cdot e_{\alpha(n)}, z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$.

□

Dla każdego sympleksu kombinatorycznego $S = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ oraz indeksu $i \in \{0, 1 \ldots, n\}$ istnieje dokładnie jeden sympleks kombinatoryczny S' taki, że $W = S \setminus \{z_i\}$ jest wspólną ścianą sympleksów S i S'. Sympleks S' nazywamy *i-tym sąsiadem* sympleksu S i oznaczamy $S[i]$.

Siatką kombinatoryczną o wierzchołku początkowym $v \in \mathbb{R}^n$, krawędzi $\varepsilon > 0$ oraz rozpiętości $k \in \mathbb{N}$ nazywamy zbiór

$$N(v, \varepsilon, k) := v + \{0, \varepsilon, \ldots, k \cdot \varepsilon\}^n.$$

Ścianami o indeksie $i \in \{1, \ldots, n\}$ siatki kombinatorycznej $N = N(v, \varepsilon, k)$ nazywamy zbiory

$$N_i^- := \{x \in N \colon \pi_i(x) = \pi_i(v)\} \text{ oraz } N_i^+ := \{x \in N \colon \pi_i(x) = \pi_i(v) + k \cdot \varepsilon\}.$$

Lemat 1. *Załóżmy, że sympleks kombinatoryczny S o krawędzi ε jest zawarty w siatce kombinatorycznej $N = N(v, \varepsilon, k)$. Jeśli $W = S_i$ jest i-tą ścianą sympleksu S, to i-ty sąsiad $S[i]$ sympleksu S nie zawiera się w siatce N wtedy i tylko wtedy, gdy W zawiera się w jednej ze ścian siatki N.*

Dowód. Ustalmy sympleks S o krawędzi ε związany z permutacją α zawarty w siatce $N = N(v, \varepsilon, k)$ oraz indeks $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Oznaczmy $W = S_i$ oraz niech C będzie kostką kombinatoryczną zawierającą S.

Załóżmy, że W zawiera się w ścianie N_j^δ dla pewnych $j \in \{1, \ldots, n\}$ oraz $\delta \in \{+, -\}$. Wówczas $i \in \{0, n\}$ (w przeciwnym razie W nie mógłby zawierać się w ścianie siatki N). Ponadto jeśli $\delta = +$, to $i = 0$, a jeśli $\delta = -$, to $i = n$ (w przeciwnym razie S nie zawiera się w N). Jest widoczne, że $S[i]$ nie zawiera się w siatce N.

Załóżmy teraz, że W nie zawiera się w ścianie siatki N. Jeśli $i \notin \{0, n\}$, to sympleks S oraz sąsiad $S[i]$ są zawarte w tej samej kostce kombinatorycznej C, która jest zawarta w siatce N. Jeśli $i = 0$, to ściana W jest zawarta w ścianie D kostki C o indeksie $m = \alpha(1)$, a ponieważ W nie zawiera się w ścianie N_m^+, więc $\pi_m[D] = \{\pi_m(v) + l \cdot \varepsilon\}$ dla pewnego $l < k$. Jeśli $i = n$, to ściana W jest zawarta w ścianie D kostki C o indeksie $m = \alpha(n)$, a ponieważ W nie zawiera się w ścianie N_m^-, więc $\pi_m[D] = \{\pi_m(v) + l \cdot \varepsilon\}$ dla pewnego $l > 0$. W obu przypadkach sąsiad $S[i]$ zawiera się w siatce N. □

2 Twierdzenie Poincarégo

Lemat 2. *W przestrzeni metrycznej* (X, d) *dane są zbiory zwarte* $A_0, A_1, \ldots, A_n$ *takie, że dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje zbiór o średnicy* $< \varepsilon$, *który ma punkt wspólny z każdym* A_i. *Wówczas*

$$\bigcap_{0 \leqslant i \leqslant n} A_i \neq \emptyset.$$

Dowód. Rozważmy funkcję $f \colon A_0 \to [0, \infty)$ o wzorze

$$f(x) := \max\{d(x, A_1), \ldots, d(x, A_n)\}.$$

Z założenia wynika, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $x \in A_0$ takie, że $f(x) < \varepsilon$. Ponieważ A_0 jest zbiorem zwartym, a f jest funkcją ciągłą, więc istnieje $x \in A_0$ takie, że $f(x) = 0$ tzn. $d(x, A_i) = 0$ dla wszystkich i. Ze zwartości zbiorów A_i dostajemy

$$x \in \bigcap_{0 \leqslant i \leqslant n} A_i.$$

□

W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ *kostką geometryczną* odpowiadającą przedziałowi domkniętemu $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ nazywamy zbiór

$$I^n = [a, b]^n = [a, b] \times \cdots \times [a, b].$$

Ścianami kostki geometrycznej $I^n = [a, b]^n$ nazywamy zbiory

$$I_i^- := \{x \in I^n \colon \pi_i(x) = a\} \text{ oraz } I_i^+ := \{x \in I^n \colon \pi_i(x) = b\},$$

gdzie $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Twierdzenie 1 (Poincarégo)**.** *Dana jest funkcja ciągła* $f = (f_1, \ldots, f_n) \colon I^n \to \mathbb{R}^n$, *która spełnia warunek:*

$$f_i(I_i^-) \subseteq (-\infty, 0] \text{ oraz } f_i(I_i^+) \subseteq [0, \infty) \text{ dla } i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{$\star$}$$

Wówczas istnieje punkt $c \in I^n$ *taki, że* $f(c) = 0$.

Dowód. Dla uproszczenia przyjmijmy, że $I^n = [0, 1]^n$ (przypadek ogólny można sprowadzić do takiego, rozważając homeomorfizm $H \colon I^n \to [a, b]^n$, który przeprowadza odpowiednie i-te ściany na i-te ściany). Przyjmijmy

$$H_i^- = f_i^{-1}(-\infty, 0] \text{ oraz } H_i^+ = f_i^{-1}[0, \infty).$$

Definiujemy odwzorowanie $\varphi\colon I^n \to \{0,1,\ldots,n\}$ wzorem

$$\varphi(x) := \min\{i\colon x \in F_i\} - 1,$$

gdzie $F_{n+1} = I^n$, $F_i = H_i^- \setminus I_i^+$ dla $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Zauważmy, że wobec założenia $(\star)$ funkcja φ ma własność:

(1) Dla wszystkich $i \in \{1,\ldots,n\}$, jeśli $x \in I_i^-$, to $\varphi(x) < i$ oraz jeśli $x \in I_i^+$, to $\varphi(x) \neq i-1$.

Sympleks S nazywamy *w pełni pokolorowanym* przez odwzorowanie φ, gdy $\varphi[S] = \{0,1,\ldots,n\}$.

Pokażemy przez indukcję ze względu na $n \in \mathbb{N}$, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ liczba p sympleksów kombinatorycznych o krawędzi $\frac{1}{k}$ w pełni pokolorowanych przez odwzorowanie φ spełniające warunek (1) zawartych w siatce $N = N(0, \frac{1}{k}, k)$, jest nieparzysta.

Dla $n = 1$ warunek (1) implikuje, że $\varphi(0) = 0$ oraz $\varphi(1) = 1$, więc teza jest mniej lub bardziej oczywista (dowód formalny używa indukcji po k). Ustalmy $n \geqslant 2$ i załóżmy, że szukana liczba sympleksów jest nieparzysta dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ oraz odwzorowań $\varphi^*\colon I^{n-1} \to \{0,1,\ldots,n-1\}$ spełniających warunek analogiczny do warunku (1) z $n-1$. Ustalmy następnie $k \in \mathbb{N}$ oraz funkcję $\varphi\colon I^n \to \{0,1,\ldots,n\}$, która spełnia warunek (1).

Dla każdego sympleksu kombinatorycznego S oznaczmy przez $\alpha(S)$ liczbę ścian W sympleksu S takich, że $\varphi[W] = \{0,1,\ldots,n-1\}$. Wówczas jeśli S jest sympleksem w pełni pokolorowanym, to $\alpha(S) = 1$, a w przeciwnym przypadku $\alpha(S) = 2$ lub $\alpha(S) = 0$, w zależności od tego czy $\varphi[S] = \{0,1,\ldots,n-1\}$, czy też $\{0,1,\ldots,n-1\} \setminus \varphi[S] \neq \emptyset$. Zachodzi zatem

$$p \equiv \sum_{S \in \mathcal{S}_n} \alpha(S) \pmod 2,$$

gdzie sumowanie rozciąga się po zbiorze $\mathcal{S}_n$ wszystkich sympleksów o krawędzi $\frac{1}{k}$ zawartych w siatce $N = N(0, \frac{1}{k}, k)$.

Na podstawie lematu 1 każda ściana jest liczona dokładnie dwa razy w przypadku, gdy nie zawiera się ona w ścianie siatki N, i dokładnie raz w przeciwnym wypadku. Stąd szukana liczba p ma taką samą parzystość jak liczba wszystkich zbiorów W, które są ścianami pewnego sympleksu $S \in \mathcal{S}_n$, przy czym zachodzi $\varphi[W] = \{0,1,\ldots,n-1\}$ i jednocześnie W zawiera się w pewnej ścianie siatki N. Dodatkowo na podstawie warunku (1) każda tego typu ściana W zawiera się w I_n^-.

Rozważmy zanurzenie $T\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ o wzorze $T(x) = (x, 0)$. Obrazem zbioru I^{n-1} przez T jest zbiór I_n^-, funkcja $\varphi^*\colon I^{n-1} \to \{0, 1, \ldots, n-1\}$ o wzorze $\varphi^*(x) = \varphi(T(x))$ jest poprawnie określona, spełnia warunek (1) z $n-1$ zamiast n, oraz przekształca w sposób wzajemnie jednoznaczny sympleksy $(n-1)$-wymiarowe o krawędzi $\frac{1}{k}$ zawarte w siatce $(n-1)$-wymiarowej $N(0, \frac{1}{k}, k)$ (czyli sympleksy z rodziny $\mathcal{S}_{n-1}$) na zbiory W, które są ścianami sympleksów z rodziny $\mathcal{S}_n$ zawartymi w I_n^-. Wnioskujemy stąd, że szukana liczba p ma taką samą parzystość jak liczba sympleksów z rodziny $\mathcal{S}_{n-1}$ w pełni pokolorowanych przez odwzorowanie φ^*, a ta liczba jest nieparzysta na mocy założenia indukcyjnego. To kończy dowód indukcyjny.

Zauważmy, że dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$, jeśli $\varphi(x) = i - 1$, to $x \in H_i^-$, natomiast jeśli $\varphi(y) = n$, to $y \in H_i^+$ dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$. Stąd każdy sympleks kombinatoryczny $S \subseteq I^n$ w pełni pokolorowany przez odwzorowanie φ spełnia warunek:

(2) $H_i^\delta \cap S \neq \emptyset$ dla wszystkich $i \in \{1, \ldots, n\}$ oraz $\delta \in \{+, -\}$.

Zatem (wobec udowodnionej indukcyjnie własności) dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje sympleks kombinatoryczny S o krawędzi $\frac{1}{k}$ spełniający warunek (2). Wobec ciągłości funkcji f zbiory H_i^δ są zwarte i wobec lematu 2 zachodzi

$$\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} H_i^+ \cap \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} H_i^- \neq \emptyset.$$

Każdy punkt c tego przekroju spełnia warunek $f(c) = 0$. □

3 Konsekwencje

Wniosek 1 (Twierdzenie o koincydencji)**.** *Niech $h\colon I^n \to \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem ciągłym takim, że*

$$h(I_i^-) \subseteq I_i^- \text{ oraz } h(I_i^+) \subseteq I_i^+ \text{ dla } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Wówczas dla każdego odwzorowania ciągłego $g\colon I^n \to I^n$ istnieje punkt $c \in I^n$ taki, że $g(c) = h(c)$.

Dowód. Stosujemy twierdzenie Poincarégo do odworowania $f\colon I^n \to \mathbb{R}^n$ o wzorze $f(x) = h(x) - g(x)$. □

Stosując twierdzenie o koincydencji do odwzorowania identycznościowego (tzn. $h(x) = x$), otrzymujemy twierdzenie Bohla–Brouwera.

Wniosek 2 (Twierdzenie Bohla–Brouwera)**.** *Każda funkcja ciągła $g\colon I^n \to I^n$ ma punkt stały.* □

Literatura

[1] W. Kulpa, *The Poincaré-Miranda theorem* Am. Math. Mon. 104, No. 6, 545–550 (1997).

[2] W. Kulpa, Topologia a ekonomia, Wydawnictwo Uniwersytetu Kardynała Stefana Wyszyńskiego, Wydanie trzecie poprawione i rozszerzone, Warszawa 2013.