Podstawy geometrii według aksjomatów Hilberta

Mateusz Kula

9 lutego 2024

Spis treści

Wstęp

Niniejszy skrypt rozwija teorię aksjomatyczną geometrii według aksjomatów Hilberta, przy czym ograniczamy się do geometrii płaskiej (dwuwymiarowej). Pełen zestaw aksjomatów opisuje (w sposób kategoryczny) geometrię euklidesową, jednak wprowadzamy nowe aksjomaty stopniowo i tym samym rozważamy teorie oparte tylko na części aksjomatów. Otrzymane w ten sposób twierdzenia są ogólniejsze, gdyż są spełnione w szerszej klasie modeli tzn. także w geometriach innych niż euklidesowa. Całość jest podzielona na pięć rozdziałów. Każdy kolejny rozszerza wcześniejsze o nowe pojęcia pierwotne lub aksjomaty, przy czym ostatni (piąty) rozdział bada rezultaty geometrii euklidesowej przy założeniu wszystkich aksjomatów. W opisie teorii geometrycznych posługujemy się językiem teorii mnogości (zbiorów). Za znane uznajemy też podstawowe zbiory liczbowe jak np. liczby naturalne i rzeczywiste.

Rozdział 1

Aksjomaty incydencji

Pierwszą grupę aksjomatów stanowią aksjomaty incydencji (przynależności). Pojęciami pierwotnymi są punkt, prosta oraz leżenie punktu na prostej, przy czym formalnie (w języku teorii mnogości) opis wygląda następująco.

Dany jest zbiór $\mathbb{P}$ zwany dalej *płaszczyzną*. Jego elementy nazywamy *punktami* i oznaczamy małymi literami a, b, c, ... Ponadto dana jest rodzina $\mathcal{L}$ podzbiorów płaszczyzny[1], której elementy nazywamy *prostymi* i oznaczamy wielkimi literami K, L, ...

Gdy punkt a należy do prostej L, to mówimy także, że punkt a *leży* na prostej L lub prosta L *przechodzi* przez punkt a. O punktach leżących na jednej prostej mówimy, że są *współliniowe*. W przeciwnym razie mówimy, że punkty są *niewspółliniowe*.

Przyjmujemy następujące aksjomaty incydencji:

I1. *Na dowolnej prostej leżą (co najmniej) dwa różne punkty.*

I2. *Przez dowolne dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta.*

I3. *Istnieją dwa różne punkty oraz trzy punkty niewspółliniowe.*

Aksjomaty I1–I3 stanowią pełen zestaw aksjomatów incydencji.

Gdy punkty a i b są różne, to (jedyną) prostą przechodzącą przez a i b oznaczamy $\overleftrightarrow{ab}$ (pozwala na to aksjomat I2). Mówimy wtedy, że punkty a i b *wyznaczają* prostą $\overleftrightarrow{ab}$. Umawiając się na to oznaczenie, otrzymujemy

[1]To założenie należy traktować jako aksjomat.

następującą własność:

$$\underset{a,b\in\mathbb{P}}{\forall}\left(a \neq b \implies \underset{L\in\mathcal{L}}{\forall}\Big(L = \overleftrightarrow{ab} \iff a, b \in L\Big)\right).$$

Stąd dla różnych punktów a i b zachodzi $\overleftrightarrow{ab} = \overleftrightarrow{ba}$.

Z aksjomatu I2 wynika, że dowolne dwie różne proste mają co najwyżej jeden punkt wspólny. Zatem dowolne dwie proste są rozłączne, mają dokładnie jeden punkt wspólny lub są równe. Dwie proste nazywamy *równoległymi*, gdy są one równe lub rozłączne. Równoległość prostych K i L oznaczamy pisząc $K \parallel L$. Gdy proste K i L nie są równoległe, to istnieje dokładnie jeden punkt o wspólny tych prostych. Mówimy wtedy, że proste K i L *przecinają się* w punkcie o.

Oto najprostsze konsekwencje przyjętych przez nas aksjomatów.

Twierdzenie 1.1. *Jeśli trzy punkty są niewspółliniowe, to są (parami) różne.*

Dowód. Ustalmy punkty niewspółliniowe a, b, c i przypuśćmy, że np. $a = b$. Na podstawie aksjomatu I2 istnieje prosta L przechodząca przez punkty a i c.[2] Wówczas punkty a, b, c leżą na L, a więc są współliniowe, co przeczy założeniu. Zatem $a \neq b$, a wobec symetrii założeń także $a \neq c$ oraz $b \neq c$. □

Twierdzenie 1.2. *Jeśli punkty a i b są różne oraz punkt c nie leży na prostej $\overleftrightarrow{ab}$, to a, b, c są niewspółliniowe.*

Dowód. Ustalmy punkty a, b, c takie jak w założeniach i przypuśćmy, że są one współliniowe. Wówczas istnieje prosta L taka, że punkty a, b, c leżą na L. Na podstawie aksjomatu I2 dostajemy $L = \overleftrightarrow{ab}$, a więc punkt c leży na prostej $\overleftrightarrow{ab}$, co przeczy założeniu. □

Twierdzenie 1.3. *Dla dowolnej prostej L istnieje punkt nie leżący na L.*

Dowód. Ustalmy prostą L. Na podstawie aksjomatu I3 istnieją trzy punkty niewspółliniowe. Co najmniej jeden z nich nie leży na prostej L, bo w przeciwnym razie byłyby współliniowe. □

[2] Jeśli $a = c$, to korzystamy najpierw z istnienia dwóch różnych punktów.

Twierdzenie 1.4. *Dla dowolnych dwóch różnych punktów a i b istnieje punkt c taki, że a, b, c są niewspółliniowe.*

Dowód. Ustalmy różne punkty a i b. Na mocy twierdzenia 1.3 istnieje punkt c nie leżący na prostej $\overleftrightarrow{ab}$, a wobec twierdzenia 1.2 punkty a, b, c są niewspółliniowe. $\square$

Twierdzenie 1.5. *Dla dowolnego punktu a istnieją punkty b i c takie, że a, b, c są niewspółliniowe.*

Dowód. Ustalmy punkt a. Z aksjomatu I3 istnieje punkt b różny od punktu a, a z twierdzenia 1.4 istnieje punkt c taki, że a, b, c są niewspółliniowe. $\square$

Zadania. Udowodnij.

1. Dla dowolnego punktu a istnieje prosta nie przechodząca przez a.
2. Przez dowolny punkt przechodzą (co najmniej) dwie różne proste.
3. Jeśli prosta L jest zawarta w prostej K, to $L = K$.

Symbolem ab oznaczamy parę nieuporządkowaną $\{a, b\}$. Gdy a i b są różnymi punktami, to ab nazywamy *odcinkiem*, zaś a i b nazywamy *końcami* odcinka ab.

Każdy skończony ciąg punków $(a_1, \ldots, a_n)$ nazywamy *łamaną*, a liczbę n nazywamy *długością* tej łamanej. Gdy $(a_1, \ldots, a_n)$ jest łamaną, to punkty $a_1, \ldots, a_n$ nazywamy *wierzchołkami* łamanej, a pary[3] a_1a_2, a_2a_3, …, $a_{n-1}a_n$ nazywamy *bokami* łamanej. Mówiąc o łamanej $(a_1, \ldots, a_n)$, czasem zaznaczamy, że mamy na myśli *łamaną zamkniętą* (choć w istocie definicja jest ta sama). Gdy mowa o łamanej zamkniętej, za bok uznajemy także parę a_na_1. Ponadto każdą parę a_ia_j, gdzie i oraz j nie są sąsiednimi indeksami (ani pierwszym i ostatnim), nazywamy *przekątną* łamanej zamkniętej.

Łamaną zamkniętą (a, b, c) taką, że punkty a, b, c są niewspółliniowe, nazywamy *trójkątem* i oznaczamy symbolem $\triangle abc$. Łamaną zamkniętą (a, b, c, d) taką, że dowolne trzy spośród punktów a, b, c, d są niewspółliniowe nazywamy *czworokątem* i oznaczamy symbolem $\square abcd$.

[3] Chociaż ta definicja dopuszcza, żeby dwa kolejne wierzchołki łamanej były równe, u nas taka sytuacja nie występuje.

Wektorem nazywamy parę uporządkowaną dwóch punktów. Wektorem *zerowym* nazywamy wektor złożony z dwóch tych samych punktów.

1.1 Pewnik Euklidesa i geometria afiniczna

Współcześnie następujące zdanie jest aksjomatem w geometrii euklidesowej.

R1. *Dla dowolnej prostej L i punktu p nie leżącego na L istnieje dokładnie jedna prosta rozłączna z L przechodząca przez p.*

Aksjomat ten nosi nazwę aksjomatu równoległości, a ze względów historycznych często jest on nazywany pewnikiem Euklidesa.[4] Twierdzenia tego podrozdziału (jak również własności w komentarzach) są konsekwencjami aksjomatów incydencji I1–I3 wraz z aksjomatem R1. Ta teoria jest nazywana *geometrią afiniczną*.

W geometrii afinicznej dla dowolnej prostej L i punktu p istnieje dokładnie jedna prosta równoległa do L przechodząca przez p. Stąd wynika, że relacja równoległości prostych jest relacją równoważności. Ponadto jeśli proste L i L' są równoległe, a prosta K przecina L (w dokładnie jednym punkcie), to K przecina L' (w dokładnie jednym punkcie). Klasy abstrakcji względem relacji równoległości w zbiorze wszystkich prostych nazywamy *kierunkami*, przy czym *kierunkiem prostej* jest jej klasa abstrakcji. Dla każdego kierunku $\mathcal{K}$ oraz punktu a istnieje dokładnie jedna prosta $K \in \mathcal{K}$ przechodząca przez a.

Równoległobokiem nazywamy czworokąt $\square abcd$ taki, że $\overleftrightarrow{ab} \parallel \overleftrightarrow{cd}$ oraz $\overleftrightarrow{bc} \parallel \overleftrightarrow{da}$.

Twierdzenie 1.6.$^{\mathbf{E}}$ *Dla dowolnych punktów niewspółliniowych a, b, c istnieje dokładnie jeden punkt d taki, że $\square abcd$ jest równoległobokiem.*

Dowód. Ustalmy punkty niewspółliniowe a, b, c. Na podstawie aksjomatu R1 istnieją prosta K równoległa do prostej $\overleftrightarrow{ab}$ przechodząca przez c oraz prosta L równoległa do prostej $\overleftrightarrow{bc}$ przechodząca przez a. Proste K i L nie są równoległe, bo w przeciwnym razie byłoby $\overleftrightarrow{ab} \parallel K \parallel L \parallel \overleftrightarrow{bc}$, co jest (wobec

[4] Na gruncie geometrii neutralnej aksjomat R1 jest równoważny oryginalnemu sformułowaniu piątego aksjomatu Euklidesa.

przechodniości relacji równoległości) niemożliwe z uwagi na niewspółliniowość punktów a, b, c. Zatem proste K i L przecinają się w pewnym (dokładnie jednym) punkcie d i wówczas $\square abcd$ jest równoległobokiem. Dla dowodu jednoznaczności punktu d ustalmy punkt d' taki, że $\square abcd'$ jest równoległobokiem. Na podstawie aksjomatu R1 dostajemy $\overleftrightarrow{cd'} = K$ oraz $\overleftrightarrow{ad'} = L$, a stąd $d = d'$. $\square$

Twierdzenie 1.7.$^{\mathbf{E}}$ *Przez dowolny punkt przechodzą (co najmniej) trzy różne proste.*

Dowód. Ustalmy punkt a. Na podstawie twierdzenia 1.5 istnieją punkty b i c takie, że punkty a, b, c są niewspółliniowe, a na mocy twierdzenia 1.6 istnieje punkt d taki, że $\square abcd$ jest równoległobokiem. Wówczas proste $\overleftrightarrow{ab}$, $\overleftrightarrow{ac}$ oraz $\overleftrightarrow{ad}$ są parami różne. $\square$

Mówimy, że punkt p jest *rzutem równoległym* punktu a na prostą L w kierunku prostej K, gdy K i L nie są równoległe oraz prosta K' równoległa do K przechodząca przez a przecina prostą L w punkcie p. Jeśli proste K i L nie są równoległe, to dla każdego punktu a istnieje dokładnie jeden punkt p, który jest rzutem równoległym punktu a na prostą L w kierunku prostej K. Dla dowolnych prostych K i L, które nie są równoległe, funkcję przypisującą każdemu punktowi a jego rzut równoległy na prostą L w kierunku prostej K nazywamy *rzutowaniem równoległym* na prostą L w kierunku prostej K.

Twierdzenie 1.8.$^{\mathbf{E}}$ *Dane są proste L, L^* oraz prosta K, która nie jest równoległa ani do L, ani do L^*. Wówczas rzutowanie równoległe na prostą L^* w kierunku prostej K określone dla punktów prostej L jest funkcją odwrotną do rzutowania równoległego na prostą L w kierunku prostej K określonego dla punktów prostej L^*.*

Dowód. Ustalmy proste L, L^* oraz K takie jak w założeniach. Gdy punkt a leży na prostej L, a punkt a^* leży na prostej L^*, to a^* jest rzutem równoległym a na prostą L^* w kierunku prostej K wtedy i tylko wtedy, gdy a jest rzutem równoległym a^* na prostą L w kierunku prostej K (gdyż oba te warunki są równoważne istnieniu prostej K' równoległej do K, która przecina prostą L w punkcie a oraz przecina prostą L^* w punkcie a^*). $\square$

Zadania. Udowodnij.

1. Dla dowolnych dwóch prostych L i L^* istnieje prosta K, która nie jest równoległa ani do L, ani do L^*.
2. Dowolne dwie proste są równoliczne.
3. Dla dowolnej rodziny $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}$ prostych parami równoległych istnieje prosta K, która przecina każdą prostą $L \in \mathcal{R}$.

Rozdział 2

Aksjomaty uporządkowania

Kolejną grupę aksjomatów stanowią aksjomaty uporządkowania. Rozszerzają one dotychczasową teorię incydencji o pojęcie pierwotne relacji leżenia między.

Dana jest relacja trójargumentowa $B \subseteq \mathbb{P} \times \mathbb{P} \times \mathbb{P}$ zwana dalej *relacją leżenia między*. Gdy punkty a, b, c są w relacji B tzn. $(a, b, c) \in B$, to mówimy, że punkt b *leży między* punktami a i c, a zależność tę oznaczamy $B(abc)$.

Oznaczamy $\overline{ab} := \{p \in \mathbb{P}\colon B(apb)\}$. Gdy $a \neq b$, to zbiór $\overline{ab}$ nazywamy *odcinkiem otwartym* o końcach a i b, a zbiór $\overline{ab} \cup ab$ nazywamy *odcinkiem domkniętym* o końcach a i b.

Przyjmujemy następujące aksjomaty uporządkowania:

B1. *Jeśli $B(abc)$, to punkty a, b, c są współliniowe oraz $a \neq c$.*

B2. *Jeśli $B(abc)$, to $B(cba)$.*

B3. *Jeśli $B(abc)$, to $\neg B(bac)$.*

B4. *Jeśli punkty a, b, c są współliniowe i (parami) różne, to $B(abc)$ lub $B(bac)$ lub $B(acb)$.*

B5. *Jeśli $B(abd)$ oraz $B(bcd)$, to $B(abc)$.*

B6. *Jeśli $B(abc)$ oraz $B(bcd)$, to $B(acd)$.*

B7. *Jeśli punkty a i b są różne, to istnieje punkt c taki, że $B(abc)$.*

B8. *Jeśli punkty a i c są różne, to istnieje punkt b taki, że $B(abc)$.*

B9. *Dane są punkty niewspółliniowe a, b, c oraz prosta L nie przechodząca przez żaden z tych punktów. Jeśli prosta L ma punkt wspólny z odcinkiem $\overline{ab}$, to ma punkt wspólny z odcinkiem $\overline{bc}$ lub z odcinkiem $\overline{ac}$.*

Niektóre z powyższych aksjomatów mają swoje zwyczajowe nazwy pochodzące od własności, którą wyrażają. Tak na przykład aksjomat B2 mówi o symetrii, aksjomat B4 o spójności, zaś aksjomaty B5 i B6 o przechodniości odpowiednio wewnętrznej i zewnętrznej. Aksjomat B9 nosi nazwę aksjomatu Pascha i najczęściej tak się do niego odwołujemy. Aksjomaty B1- B8 dotyczą punktów położonych na jednej prostej i (po odpowiednich modyfikacjach) przenoszą się one na geometrię jednowymiarową. Aksjomat Pascha jako jedyny nie ma charakteru liniowego i w sposób istotny łączy pojęcie prostej i relacji leżenia między.

Uwaga. Aksjomaty uporządkowania w powyższej formie nie są wzajemnie niezależne. Z listy aksjomatów można bez zmiany całej teorii usunąć aksjomaty B4, B5, B6 oraz B8, gdyż dają się one udowodnić w oparciu o aksjomaty pozostałe. W tych dowodach korzysta się z istnienia punktów niewspółliniowych i aksjomatu Pascha, czyli geometrii płaszczyzny mimo, że dowodzone własności mają charakter liniowy. Istnieją także inne zależności wynikania między tymi aksjomatami (przykładowo aksjomat B3 wynika z aksjomatów B5 oraz B1).

W tym rozdziale badamy konsekwencje aksjomatów incydencji I1–I3 oraz aksjomatów uporządkowania B1–B9. Tę teorię nazywamy *słabą geometrią uporządkowania.*

Oto najprostsze konsekwencje aksjomatów będące zarazem ich wzmocnieniem (dowody pozostawiamy czytelnikowi).

Twierdzenie 2.1. *Jeśli $B(abc)$, to punkty a, b i c są (parami) różne.* □

Twierdzenie 2.2. *Jeśli $B(abc)$, to $\neg B(bac)$ oraz $\neg B(acb)$.* □

Twierdzenie 2.3. *Jeśli $B(abd)$ oraz $B(bcd)$, to $B(abc)$ oraz $B(bcd)$.* □

Twierdzenie 2.4. *Jeśli $B(abc)$ oraz $B(bcd)$, to $B(abd)$ oraz $B(acd)$.* □

Dla dowolnych różnych punktów a i b, z aksjomatu B2 wynika $\overline{ab} = \overline{ba}$, z aksjomatów I2 oraz B1 wynika $\overline{ab} \subseteq \overleftrightarrow{ab}$, zaś z aksjomatu B8 wynika $\overline{ab} \neq \emptyset$.

Używanie aksjomatów B1- B6 (oraz twierdzeń 2.1–2.4) jest na tyle proste, a zarazem uciążliwe w zapisie, że zazwyczaj korzystamy z nich nie zaznaczając tego wyraźnie.

Gdy cztery punkty a, b, c, d znajdują się w wymienionej kolejności na jednej prostej, to oznaczamy to pisząc $B(abcd)$. Formalnie napis ten oznacza koniunkcję

$$B(abc) \wedge B(abd) \wedge B(acd) \wedge B(bcd).$$

Poniższe twierdzenie mówi, że prosta nie może zawierać oczek.

Twierdzenie 2.5. *Jeśli* $B(apb)$, $B(aqb)$ *oraz* $p \neq q$, *to* $B(apqb)$ *lub* $B(aqpb)$.

Dowód. Ustalmy punkty a, b, p, q takie jak w założeniach. Wówczas punkty a, b, p, q są (parami) różne i współliniowe. Na podstawie aksjomatu B4 zachodzi $B(apq)$ lub $B(aqp)$ lub $B(paq)$. Przypuszczenie $B(paq)$ wobec założenia $B(aqb)$ (oraz przechodniości) daje $B(pab)$, co jest sprzeczne z drugim założeniem $B(apb)$. Zatem $B(apqb)$ lub $B(aqpb)$. □

Następne twierdzenie mówi z kolei, że prosta nie może się rozwidlać.

Twierdzenie 2.6. *Jeśli* $B(abp)$, $B(abq)$ *oraz* $p \neq q$, *to* $B(abpq)$ *lub* $B(abqp)$.

Dowód. Dowód przebiega podobnie jak dla twierdzenia 2.5. □

Zbiór $W \subseteq \mathbb{P}$ nazywamy zbiorem *wypukłym*, gdy dla dowolnych punktów $p, q \in W$, gdzie $p \neq q$, odcinek otwarty $\overline{pq}$ jest zawarty w W. Przekrój dowolnej[1] rodziny zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym.

Zadania. Udowodnij.

1. Zbiór $L \subseteq \mathbb{P}$ jest prostą wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją różne punkty a i b takie, że

$$L = \{p \in \mathbb{P} : B(pab) \vee p = a \vee B(apb) \vee p = b \vee B(abp)\}.^2$$

[1] Za przekrój rodziny pustej uznajemy całą płaszczyznę $\mathbb{P}$.

[2] Własność ta daje charakteryzację prostej w języku relacji leżenia między. Pozwala to na ewentualne usunięcie pojęcia prostej z pojęć pierwotnych. Wtedy charakteryzację tę należałoby przyjąć za definicję prostej.

2. Dane są punkty niewspółliniowe a, b, c oraz punkty $p \in \overline{ab}$, $q \in \overline{bc}$, $r \in \overline{ac}$. Wówczas punkty a, b, q, punkty a, p, r oraz punkty a, p, q tworzą trójki punktów niewspółliniowych.

3. Jeśli $B(abc)$, to $\overline{ac} = \overline{ab} \cup \{b\} \cup \overline{bc}$, przy czym $\overline{ab} \cap \overline{bc} = \emptyset$.

4. Odcinek otwarty i odcinek domknięty są zbiorami wypukłymi.

5. Jeśli a, b, c, d są punktami, gdzie $a \neq b$, $c \neq d$ oraz $\overline{ab} \cup ab = \overline{cd} \cup cd$, to $ab = cd$ (tzn. odcinek domknięty wyznacza swoje końce jednoznacznie).

6. Odcinek otwarty jest zbiorem nieskończonym.

7. Jeśli punkty a i b są różne, L jest prostą oraz $\overline{ab} \subseteq L$, to a i b leżą na L.

8. Jeśli a, b, c, d są punktami, gdzie $a \neq b$, $c \neq d$ oraz $\overline{ab} \subseteq \overline{cd}$, to $ab \subseteq \overline{cd} \cup cd$.

9. Jeśli a, b, c, d są punktami, gdzie $a \neq b$, $c \neq d$ oraz $\overline{ab} = \overline{cd}$, to $ab = cd$ (tzn. odcinek otwarty wyznacza swoje końce jednoznacznie).

2.1 Półprosta

Na gruncie geometrii uporządkowania można wprowadzić definicję półprostej. Poniższe twierdzenie stanowi podstawę dla tej definicji.

Twierdzenie 2.7. *Dana jest prosta L oraz punkt o leżący na L. Relacja dwuargumentowa $\sim$ w zbiorze $L \setminus \{o\}$ określona przez wzór*

$$a \sim b :\Longleftrightarrow (B(oab) \vee a = b \vee B(oba))$$

jest relacją równoważności o dokładnie dwóch klasach abstrakcji.

Dowód. Ustalmy prostą L oraz punkt o leżący na L. Zwrotność oraz symetria relacji $\sim$ wynikają z samej definicji. Dla dowodu przechodniości relacji $\sim$ ustalmy punkty a, b, c w zbiorze $L \setminus \{o\}$ i załóżmy, że $a \sim b$ oraz $b \sim c$. Mamy do rozpatrzenia następujące przypadki:

(a) $B(oab)$ oraz $B(obc)$. Wówczas zachodzi $B(oac)$.

(b) $B(oab)$ oraz $B(ocb)$. Wówczas na mocy twierdzenia 2.5 zachodzi $B(oac)$ lub $a = c$ lub $B(oca)$.

(c) $B(oba)$ oraz $B(obc)$. Wówczas na mocy twierdzenia 2.6 zachodzi $B(oac)$ lub $a = c$ lub $B(oca)$.

(d) $B(oba)$ oraz $B(ocb)$. Wówczas zachodzi $B(oca)$.

W każdym przypadku dostajemy $a \sim c$. Zatem relacja $\sim$ jest relacją równoważności.

Dla dowolnych punktów a i b w zbiorze $L \setminus \{o\}$ zachodzi równoważność:

$$a \sim b \iff \neg B(aob).$$

Z aksjomatu I1 na prostej L leży punkt a różny od punktu o, a z aksjomatu B7 istnieje punkt b taki, że $B(aob)$. Przypuśćmy, że istnieje punkt c w zbiorze $L \setminus \{o\}$ taki, że $\neg c \sim a$ oraz $\neg c \sim b$. Wówczas $B(coa)$ oraz $B(cob)$, więc na mocy twierdzenia 2.6 zachodzi $B(oab)$ lub $a = b$ lub $B(oba)$, co jest sprzeczne z $B(aob)$. Dowodzi to, że istnieją dokładnie dwie klasy abstrakcji relacji $\sim$. □

Zbiór $A \subseteq \mathbb{P}$ nazywamy *półprostą (otwartą)*, gdy jest on klasą abstrakcji względem relacji $\sim$ określonej w twierdzeniu 2.7 dla pewnej prostej L oraz punktu o leżącego na L. Wtedy punkt o nazywamy *początkiem* półprostej A.

Twierdzenie 2.8. *Każda półprosta jest zawarta w dokładnie jednej prostej i ma dokładnie jeden początek.*

Dowód. Ustalmy półprostą A. Ponieważ półprosta A jest zbiorem co najmniej dwuelementowym (a nawet nieskończonym), więc z aksjomatu I2 wynika, że A jest zawarta w dokładnie jednej prostej L. Niech punkty o oraz o' będą początkami półprostej A i przypuśćmy, że $o \neq o'$. Weźmy punkt a na półprostej A. Na podstawie aksjomatu B4 zachodzi $B(aoo')$ lub $B(oao')$ lub $B(oo'a)$. W pierwszym i drugim przypadku punkt o leży na półprostej A, a w trzecim przypadku (drugim także) punkt o' leży na półprostej A. Otrzymana sprzeczność kończy dowód. □

Twierdzenie 2.8 pozwala nam przyjąć oznaczenie na początek dowolnej półprostej oraz prostą, w której ta półprosta się zawiera. Jeśli A jest półprostą, to jej początek oznaczamy $o(A)$, zaś wspomnianą prostą oznaczamy $L(A)$. Punkt $o(A)$ leży na prostej $L(A)$. *Półprostą domkniętą* nazywamy zbiór powstały przez dołączenie do pewnej półprostej otwartej A jej początku $o(A)$ tzn. zbiór $A \cup \{o(A)\}$.

Mówimy, że półproste A i B są *dopełniające*, gdy są różnymi klasami abstrakcji względem tej samej relacji $\sim$ określonej w twierdzeniu 2.7, innymi słowy $L(A) = L(B)$, $o(A) = o(B)$ oraz $A \neq B$. Ponieważ klasy abstrakcji każdej relacji $\sim$ są dokładnie dwie, więc dla każdej półprostej A istnieje dokładnie jedna półprosta B taka, że A i B są dopełniające. Tę jedyną półprostą oznaczamy A^*. Zachodzi $(A^*)^* = A$.

Przyjmujemy oznaczenie

$$\overrightarrow{oa} := \{p \in \mathbb{P} \colon B(opa) \vee p = a \vee B(oap)\}.$$

Jeśli punkty o i a są różne, to zbiór $\overrightarrow{oa}$ jest półprostą o początku o zawartą w prostej $\overleftrightarrow{oa}$. Ponadto $\overrightarrow{oa}^* = \{p \in \mathbb{P} \colon B(poa)\}$ oraz dla dowolnych punktów o, a, b jeśli $B(oab)$, to $\overrightarrow{oa} = \overrightarrow{ob}$, a jeśli $B(aob)$, to $\overrightarrow{oa} = \overrightarrow{ob}^*$.

Zadania. Udowodnij.

1. Jeśli $a \neq b$, to $\overline{ab} = \overrightarrow{ab} \cap \overrightarrow{ba}$ oraz $\overleftrightarrow{ab} = \overrightarrow{ab} \cup \overrightarrow{ba}$.
2. Półprosta otwarta i półprosta domknięta są zbiorami wypukłymi.
3. Dla dowolnej półprostej A nie istnieje odcinek otwarty S taki, że $A \subseteq S$.
4. Jeśli A, A' są półprostymi oraz $A \cup \{o(A)\} = A' \cup \{o(A')\}$, to $A = A'$ (półprosta domknięta wyznacza półprostą otwartą jednoznacznie).

2.2 Półpłaszczyzna

Wzmocnimy teraz aksjomat Pascha. Poniższe twierdzenie mówi, że prosta nie może przecinać wszystkich trzech boków trójkąta.

Twierdzenie 2.9. *Dane są punkty niewspółliniowe a, b, c. Wówczas nie istnieje prosta, która ma punkt wspólny jednocześnie z wszystkimi odcinkami $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ oraz $\overline{ac}$.*

Dowód. Ustalmy punkty niewspółliniowe a, b, c. Przypuśćmy, że prosta L ma punkty wspólne p, q, r odpowiednio z odcinkami $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ oraz $\overline{ac}$. Na podstawie aksjomatu B4 zachodzi $B(pqr)$ lub $B(qpr)$ lub $B(prq)$, a dla ustalenia uwagi możemy założyć, że $B(pqr)$. Punkty a, p, r są niewspółliniowe, prosta $\overleftrightarrow{bc}$ nie przechodzi przez żaden z tych punktów i ma punkt wspólny q z odcinkiem $\overline{pr}$. Z aksjomatu Pascha prosta $\overleftrightarrow{bc}$ ma punkt wspólny z odcinkiem $\overline{ap}$ lub z odcinkiem $\overline{ar}$. W pierwszym przypadku punktem wspólnym jest punkt b, a więc zachodzi $B(abp)$, co jest sprzeczne z $B(apb)$. W drugim przypadku punktem wspólnym jest punkt c, więc zachodzi $B(acr)$, co jest sprzeczne z $B(arc)$. □

Mówimy, że punkty a i b *leżą po tej samej stronie* prostej L, gdy a i b nie leżą na L oraz odcinek $\overline{ab}$ jest rozłączny L. Mówimy, że punkty a i b *leżą po różnych stronach* prostej L, gdy a i b nie leżą na L oraz odcinek $\overline{ab}$ ma punkt wspólny z L.

Poniższe twierdzenie stanowi podstawę dla definicji półpłaszczyzny.

Twierdzenie 2.10. *Dana jest prosta L. Relacja dwuargumentowa $\simeq$ w zbiorze $\mathbb{P} \setminus L$ określona przez wzór*

$$a \simeq b :\Longleftrightarrow \overline{ab} \cap L = \emptyset$$

jest relacją równoważności o dokładnie dwóch klasach abstrakcji.

Dowód. Zwrotność i symetria relacji $\simeq$ są widoczne. Dla dowodu przechodniości ustalmy punkty a, b, c i załóżmy, że $a \simeq b$ oraz $b \simeq c$. Rozważmy przypadki:

(a) Punkty a, b, c są współliniowe. Wówczas istnieje prosta K taka, że a, b, c leżą na K. Jeśli proste K i L są rozłączne, to $\overline{ac} \cap L \subseteq K \cap L = \emptyset$, więc $a \simeq c$. Jeśli proste K i L przecinają się w (dokładnie jednym) punkcie o, to $\overrightarrow{oa} = \overrightarrow{ob} = \overrightarrow{oc}$, więc także $a \simeq c$.

(b) Punkty a, b, c są niewspółliniowe. Gdyby odcinek $\overline{ac}$ miał punkt wspólny z prostą L, to z aksjomatu Pascha prosta L miałaby punkt wspólny z odcinkiem $\overline{ab}$ lub z odcinkiem $\overline{bc}$, co jest sprzeczne z założeniem. Zatem $a \simeq c$.

Przejdźmy do dowodu, że klasy abstrakcji są dokładnie dwie. Istnieje punkt o na prostej L oraz punkt a nie leżący na prostej L. Na mocy aksjomatu B7 istnieje punkt b taki, że $B(aob)$. Punkty a i b wyznaczają dwie różne klasy abstrakcji relacji $\simeq$. Dla dowodu, że klasy abstrakcji są dokładnie dwie, weźmy dowolny punkt c nie leżący na prostej L i rozważmy przypadki:

(a) Punkty a, b, c są współliniowe. Wówczas c leży na $\overrightarrow{oa}$ lub na $\overrightarrow{ob}$, więc $c \simeq a$ lub $c \simeq b$.

(b) Punkty a, b, c są niewspółliniowe. Wówczas na mocy twierdzenia 2.9 niemożliwe jest, aby odcinek $\overline{ac}$ miał punkt wspólny z prostą L i jednocześnie odcinek $\overline{bc}$ miał punkt wspólny z prostą L. Zatem $c \simeq a$ lub $c \simeq b$.

□

Zbiór $M \subseteq \mathbb{P}$ nazywamy *półpłaszczyzną (otwartą)*, gdy M jest klasą abstrakcji względem relacji $\simeq$ określonej w twierdzeniu 2.10 dla pewnej prostej L. Mówimy wtedy, że prosta L jest *brzegiem* półpłaszczyzny M.

Twierdzenie 2.11. *Każda półpłaszczyzna wyznacza swój brzeg jednoznacznie.*

Dowód. Ustalmy półpłaszczyznę M i przypuśćmy, że proste L oraz L' są różnymi brzegami M. Istnieją punkt p, który leży w M, oraz punkt a, który leży na prostej L i nie leży na prostej L'. Ponieważ punkt a nie leży w M, więc punkty a i p leżą w różnych półpłaszczyznach o brzegu L'. Istnieje więc punkt b, który leży na L', taki, że $B(abp)$. Wówczas $\overline{bp} \cap L = \emptyset$, więc b leży w M i jednocześnie na L', co jest niemożliwe. □

Powyższe twierdzenie pozwala nam przyjąć oznaczenie na brzeg półpłaszczyzny. Jeśli M jest półpłaszczyzną, to jej brzeg oznaczamy $L(M)$. Półpłaszczyzny M i N nazywamy *dopełniającymi*, gdy są różnymi klasami abstrakcji względem tej samej relacji $\simeq$ określonej w twierdzeniu 2.10 dla pewnej prostej L, innymi słowy $L(M) = L(N)$ oraz $M \neq N$. Z faktu, że klasy abstrakcji dla każdej relacji $\simeq$ są dokładnie dwie, wynika, że dla każdej półpłaszczyzny M istnieje dokładnie jedna półpłaszczyzna N taka, że M

i N są dopełniające. Tę (jedyną) półpłaszczyznę oznaczamy M^*. Zachodzi $(M^*)^* = M$.

Mówimy, że zbiory X, Y leżą *po tej samej stronie* prostej L, gdy istnieje półpłaszczyzna o brzegu L zawierająca zbiory X i Y. Mówimy, że zbiory X, Y leżą *po różnych stronach* prostej L, gdy istnieje półpłaszczyzna M o brzegu L taka, że $X \subseteq M$ oraz $Y \subseteq M^*$.

Półpłaszczyzną domkniętą nazywamy zbiór, który jest sumą pewnej półpłaszczyzny otwartej M i jej brzegu $L(M)$ tzn. zbiór $M \cup L(M)$.

Jeśli M jest półpłaszczyzną o brzegu L, punkt a leży w M oraz punkt o leży na L, to $\overrightarrow{oa} \subseteq M$ oraz $\overrightarrow{oa}^* \subseteq M^*$.

Zadania. Udowodnij.

1. Półpłaszczyzna otwarta i półpłaszczyzna domknięta są zbiorami wypukłymi.

2. Jeśli M, M' są półprostymi oraz $M \cup L(M) = M' \cup L(M')$, to $M = M'$ (półpłaszczyzna domknięta wyznacza półpłaszczyznę otwartą jednoznacznie).

3. Dana jest prosta L oraz dwa zbiory M i N wypukłe takie, że $M \cup N = \mathbb{P} \setminus L$. Wówczas M i N są dopełniającymi półpłaszczyznami o brzegu L.

4. Dana jest prosta L oraz dwa zbiory M i N niepuste takie, że $M \cup N = \mathbb{P} \setminus L$, a ponadto dla dowolnego punktu a leżącego w M i punktu b leżącego w N zachodzi $\overline{ab} \cap L \neq \emptyset$. Wówczas M i N są dopełniającymi półpłaszczyznami o brzegu L.

5. Dane są punkty niewspółliniowe a, b, c oraz punkty p, q takie, że $B(apb)$ oraz albo $B(bcq)$ albo $B(qbc)$. Wówczas istnieje punkt r taki, że $B(arc)$ oraz w przypadku $B(bcq)$ zachodzi $B(prq)$, a w przypadku $B(qbc)$ zachodzi $B(qpr)$.

6. Dla dowolnych różnych punktów a i b istnieje prosta L taka, że a i b leżą po różnych stronach prostej L.

2.3 Kąty

Zbiór $AB = \{A, B\}$ nazywamy *kątem*, gdy A i B są półprostymi o wspólnym początku o, różnymi i nie dopełniającymi. Punkt o nazywamy wtedy *wierzchołkiem* kąta, a półproste A i B nazywamy *ramionami* kąta. Przyjmujemy oznaczenie

$$\angle aob := \overrightarrow{oa}\overrightarrow{ob} = \{\overrightarrow{oa}, \overrightarrow{ob}\}.$$

Para AB jest kątem wtedy i tylko wtedy, gdy A i B są półprostymi takimi, że $o(A) = o(B)$ oraz $L(A) \neq L(B)$, natomiast $\angle aob$ jest kątem wtedy i tylko wtedy, gdy punkty a, o, b są niewspółliniowe.

Kątem skierowanym nazywamy parę uporządkowaną dwóch półprostych o wspólnym początku. *Kątem zerowym* nazywamy kąt skierowany złożony z tych samych półprostych, zaś *kątem półpełnym* nazywamy kąt skierowany złożony z dopełniających się półprostych.

Dwa kąty nazywamy kątami *przyległymi*, gdy mają one jedno ramię wspólne, a pozostałe dwa ramiona są dopełniającymi półprostymi. Dla każdego kąta AB istnieją dokładnie dwa kąty do niego przyległe — są to kąty A^*B oraz AB^*. Dwa kąty nazywamy kątami *wierzchołkowymi*, gdy ramiona jednego kąta są dopełniającymi półprostymi do ramion drugiego kąta. Dla każdego kąta AB istnieje dokładnie jeden kąt dla niego wierzchołkowy — jest to kąt A^*B^*.

Kątami *wewnętrznymi* trójkąta $\triangle abc$ nazywamy kąty $\angle abc, \angle bac, \angle acb$. Kątami *zewnętrznymi* trójkąta abc nazywamy kąty przyległe do kątów wewnętrznych (każdy trójkąt ma sześć kątów zewnętrznych).

Mówimy, że półproste $A_1, \ldots, A_n$ są *zgodne*, gdy mają one wspólny początek o oraz istnieje prosta L nie przechodząca przez o, która przecina każdą z półprostych $A_1, \ldots, A_n$. Mówimy, że półprosta B *leży między* półprostymi A i C, co zapisujemy $A - B - C$, gdy półproste A, B, C są zgodne oraz dla każdej prostej L, która nie przechodzi przez wspólny początek o tych półprostych oraz przecina półproste A, B, C odpowiednio w punktach a, b, c, zachodzi $B(abc)$.

Twierdzenie 2.12. *Dane są półproste A, B, C o wspólnym początku o oraz prosta L nie przechodząca przez o, która przecina półproste A, B, C odpowiednio w punktach a, b, c tak, że zachodzi $B(abc)$. Wówczas zachodzi*

$A - B - C$.

Dowód. Niech półproste A, B, C, prosta L oraz punkty o, a, b, c będą takie jak w założeniach. Punkty a i c leżą po różnych stronach prostej $L(B)$, a więc półproste A i C leżą po różnych stronach prostej $L(B)$. Ustalmy prostą L' nie przechodzącą przez o, która przecina półproste A, B, C odpowiednio w punktach a', b', c'. Wówczas punkty a' i c' leżą po różnych stronach prostej $L(B)$, a więc $B(a'b'c')$. □

Gdy A, B, C są półprostymi takimi, że $A - B - C$, to AB, BC, AC są kątami, zachodzi $C - B - A$, $\neg B - A - C$, $\neg A - C - B$, a ponadto A i B leżą po tej samej stronie prostej $L(C)$, B i C leżą po tej samej stronie prostej $L(A)$, zaś A i C leżą po różnych stronach prostej $L(B)$.

Twierdzenie 2.13. *Jeśli półproste A, B, C są zgodne i parami różne, to $A - B - C$ lub $B - A - C$ lub $A - C - B$.*

Dowód. Niech półproste A, B, C będą takie jak w założeniach. Istnieje prosta L nie przechodząca przez wspólny początek o półprostych A, B, C, która przecina te półproste odpowiednio w punktach a, b, c. Na mocy aksjomatu B4 zachodzi $B(abc)$ lub $B(bac)$ lub $B(acb)$. Na podstawie twierdzenia 2.12 zachodzi $A - B - C$ lub $B - A - C$ lub $A - C - B$. □

Twierdzenie 2.14. *Jeśli A, B, C są półprostymi takimi, że $A - B - C$, to półproste A, B^*, C nie są zgodne.*

Dowód. Ustalmy półproste A, B, C takie jak w założeniach. Wówczas proste $L(A)$, $L(B)$, $L(C)$ są parami różne. Przypuśćmy, że półproste A, B^*, C są zgodne. Na mocy twierdzenia 2.13 zachodzi $A - B^* - C$ lub $B^* - A - C$ lub $A - C - B^*$. W przypadku $A - B^* - C$ lub $B^* - A - C$ półproste A i B^* leżą po tej samej stronie prostej $L(C)$, a z założenia półproste A i B leżą po tej samej stronie prostej $L(C)$, więc B i B^* leżą w jednej półpłaszczyźnie, przy czym punkt $o(B)$ leży na jej brzegu, sprzeczność. W przypadku $A - C - B^*$ (także w przypadku $A - B^* - C$) do sprzeczności prowadzi analogiczne rozumowanie dla półpłaszczyzny o brzegu $L(A)$. □

Twierdzenie 2.15. *Jeśli A, B, C są półprostymi takimi, że $A - B - C$, punkt a leży na A oraz punkt c leży na C, to odcinek $\overline{ac}$ ma punkt wspólny z półprostą B.*

Dowód. Niech półproste A, B, C oraz punkty a, c będą takie jak w założeniach, przy czym punkt o jest wspólnym początkiem półprostych A, B, C. Półproste A i C leżą po różnych stronach prostej $L(B)$, więc odcinek $\overline{ac}$ ma punkt wspólny b z prostą $L(B)$. Punkt b jest różny od punktu o, a na mocy twierdzenia 2.14 ponadto b nie leży na półprostej B^*. Stąd punkt b leży na półprostej B. □

Twierdzenie 2.16. *Jeśli A, B, C są półprostymi takimi, że $A - B - C$, to zachodzi $B - C - A^*$.*

Dowód. Ustalmy półproste A, B, C takie jak w założeniach. Oznaczmy przez M półpłaszczyznę o brzegu $L(A)$ zawierającą półproste B i C. Weźmy punkty a, a^*, b leżące odpowiednio na półprostych A, A^*, B. Punkty a i b leżą po tej samej stronie prostej $L(C)$, a punkty a i a^* leżą po różnych stronach prostej $L(C)$. Stąd prosta $L(C)$ ma punkt wspólny c z odcinkiem $\overline{a^*b}$. Ponieważ $\overline{a^*b} \subseteq M$, więc punkt c leży na C i zachodzi $B - C - A^*$. □

Twierdzenie 2.17. *Jeśli A, B, C są różnymi półprostymi o wspólnym początku takimi, że B i C leżą po tej samej stronie prostej $L(A)$, to zachodzi $A - B - C$ lub $A - C - B$.*

Dowód. Ustalmy półproste A, B, C takie jak w założeniach i załóżmy, że $\neg A - C - B$. Oznaczmy przez o wspólny początek półprostych A, B, C, a przez M półpłaszczyznę o brzegu $L(A)$ zawierającą półproste B i C. Weźmy punkty a, a^*, b leżące odpowiednio na półprostych A, A^*, B. Ponieważ $\neg A - C - B$ oraz $C^* \subseteq M^*$, więc prosta $L(C)$ nie ma punktów wspólnych z odcinkiem $\overline{ab}$. Prosta $L(C)$ ma natomiast punkt wspólny o z odcinkiem $\overline{aa^*}$, więc na mocy aksjomatu Pascha $L(C)$ ma punkt wspólny c z odcinkiem $\overline{a^*b}$. Ponieważ $\overline{a^*b} \subseteq M$, więc punkt c leży na C i zachodzi $A^* - C - B$. Stąd na podstawie twierdzenia 2.16 dostajemy $A - B - C$. □

Jeżeli AB jest kątem, to *wnętrzem* kąta AB nazywamy sumę mnogościową wszystkich półprostych P takich, że $A - P - B$.

Uwaga. Intuicyjnie ramiona dowolnego kąta dzielą płaszczyznę na dwa obszary, z których oba można by ewentualnie uznać za wnętrze tego kąta. W naszych rozważaniach wnętrze kąta jest zawsze tym z tych dwóch obszarów, który jest wypukły. Tym samym nie rozważamy w ogóle tzw. kątów wklęsłych.

Twierdzenie 2.18. *Dany jest kąt AB. Przez M_A oznaczamy półpłaszczyznę o brzegu $L(A)$, w której zawiera się półprosta B, zaś przez M_B oznaczamy półpłaszczyznę o brzegu $L(B)$, w której zawiera się półprosta A. Wówczas wnętrze kąta AB jest równe przekrojowi $M_A \cap M_B$.*

Dowód. Ustalmy kąt AB o wierzchołku o i przyjmijmy oznaczenia z wypowiedzi twierdzenia. Gdy P jest półprostą taką, że $A - P - B$, to $P \subseteq M_A \cap M_B$, co dowodzi, że wnętrze kąta AB zawiera się w $M_A \cap M_B$.

Na odwrót, ustalmy punkt p w zbiorze $M_A \cap M_B$. Rozważmy półprostą $P := \overrightarrow{op}$. Ponieważ $P \subseteq M_A$ oraz $P \subseteq M_B$, więc korzystając z twierdzenia 2.17 zachodzi $A - P - B$ lub $A - B - P$, a także $B - P - A$ lub $B - A - P$. Jedyną możliwością, która nie prowadzi do sprzeczności, jest $A - P - B$, a więc p leży we wnętrzu kąta AB. $\square$

Pękiem półprostych o wierzchołku o nazywamy zbiór wszystkich półprostych o początku o.

Zadania. Udowodnij.

1. Jeśli AB jest kątem, to istnieją półprosta P taka, że $A - B - P$ i półprosta Q taka, że $A - Q - B$.

2. Jeśli A, B, C, D są półprostymi takimi, że $A - C - D$ oraz $A - B - C$, to $A - B - D$ oraz $B - C - D$.

3. Jeśli A, B, C, D są zgodnymi półprostymi takimi, że $A - B - C$ oraz $B - C - D$, to $A - B - D$ oraz $A - C - D$.

4. Dane są półproste A, B, C o wspólnym początku. Wówczas $A - B^* - C$ wtedy i tylko wtedy, gdy A, B, C nie są zgodne oraz $L(A)$, $L(B)$, $L(C)$ są (parami) różne.

2.4 Trójkąt

Gdy a, b, c są punktami niewspółliniowymi, to *wnętrzem* trójkąta $\triangle abc$ nazywamy zbiór $M_a \cap M_b \cap M_c$, gdzie M_a jest półpłaszczyzną o brzegu $\overleftrightarrow{bc}$, w której leży punkt a, M_b jest półpłaszczyzną o brzeu $\overleftrightarrow{ac}$, w której leży punkt b, a M_c jest półpłaszczyzną o brzeu $\overleftrightarrow{ab}$, w której leży punkt c. *Brzegiem* trójkąta $\triangle abc$ nazywamy zbiór $\overline{ab} \cup \overline{bc} \cup \overline{ac} \cup \{a, b, c\}$, a *domknięciem* trójkąta $\triangle abc$ nazywamy sumę wnętrza i brzegu trójkąta $\triangle abc$.

Wnętrze trójkąta jest zbiorem wypukłym. Ponadto na mocy twierdzenia 2.18 wnętrze trójkąta $\triangle abc$ jest równe przekrojowi wnętrz dowolnych dwóch kątów wewnętrznych tego trójkąta.

Twierdzenie 2.19. *Gdy punkty a, b, c są niewspółliniowe, to punkt p leży we wnętrzu trójkąta $\triangle abc$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje punkt q taki, że $B(aqb)$ oraz $B(cpq)$.*

Dowód. Ustalmy punkty niewspółliniowe a, b, c. Załóżmy, że punkt p leży we wnętrzu trójkąta $\triangle abc$. Na podstawie twierdzenia 2.18 punkt p leży we wnętrzu kąta $\angle acb$ tzn. $\overrightarrow{ca} - \overrightarrow{cp} - \overrightarrow{cb}$. Na podstawie twierdzenia 2.15 odcinek $\overline{ab}$ przecina półprostą $\overrightarrow{cp}$ w pewnym punkcie q. Ponieważ p i c leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{ab}$, więc zachodzi $B(cpq)$.

Na odwrót, załóżmy, że istnieje punkt q taki, że $B(aqb)$ oraz $B(cpq)$. Wówczas punkty a i q leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{bc}$, a także punkty p i q leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{bc}$. Stąd punkty a i p leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{bc}$. Analogiczne rozumowanie pokazuje, że punkty b i p leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{ac}$. Ponadto punkty c i p leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{ab}$. □

Twierdzenie 2.20. *Dane są punkty niewspółliniowe a, b, c oraz punkt p leżący we wnętrzu trójkąta $\triangle abc$. Wówczas dowolna półprosta o początku w punkcie p ma dokładnie jeden punkt wspólny z brzegiem trójkąta $\triangle abc$.*

Dowód. Niech punkty a, b, c oraz p będą takie jak w założeniach i niech P będzie półprostą o początku w punkcie p. Zaczniemy od dowodu istnienia punktu wspólnego. Wobec twierdzenia 2.19 istnieje punkt q taki, że $B(aqb)$ oraz $B(cpq)$. Rozważmy przypadki:

(a) $P = \overrightarrow{pc}$. Wówczas c jest punktem wspólnym brzegu i półprostej P.

(b) $P = \overrightarrow{pq}$. Wówczas q jest punktem wspólnym brzegu i półprostej P.

(c) Półprosta P zawiera się w półpłaszczyźnie o brzegu $\overleftrightarrow{cq}$, w której leży punkt a. Wówczas z aksjomatu Pascha wynika, że prosta $L(P)$ przechodzi przez a lub ma punkt wspólny z odcinkiem $\overline{ac}$ lub ma punkt wspólny z odcinkiem $\overline{aq}$. W każdym przypadku półprosta P ma punkt wspólny z brzegiem trójkąta $\triangle abc$.

(d) Półprosta P zawiera się w półpłaszczyźnie o brzegu $\overleftrightarrow{cq}$, w której leży punkt b. Przypadek analogiczny do przypadku (c).

Dla dowodu jednoznaczności przypuśćmy, że półprosta P ma dwa różne punkty wspólne s, s' z brzegiem trójkąta $\triangle abc$. Zachodzi $B(pss')$ lub $B(ps's)$. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że $B(pss')$ oraz punkt s leży na prostej $\overleftrightarrow{ab}$. Oznaczmy przez M półpłaszczyznę o brzegu $\overleftrightarrow{ab}$, w której leży punkt c. Wówczas punkt p leży w M, a punkt s' leży w M^*. Z drugiej strony punkt s' leży na brzegu trójkąta $\triangle abc$, a brzeg ten jest zawarty w $M \cup \overleftrightarrow{ab}$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 2.21. *Dane są punkty niewspółliniowe a, b, c oraz punkt p leżący we wnętrzu trójkąta $\triangle abc$. Wówczas dowolna prosta przechodząca przez punkt p przecina brzeg trójkąta $\triangle abc$ w dokładnie dwóch punktach, przy czym p leży między nimi.*

Dowód. Ustalmy punkty a, b, c oraz p takie jak w założeniach, a także prostą L przechodzącą przez p. Wówczas teza wynika z twierdzenia 2.20 zastosowanego do półprostych o początku w punkcie p zawartych w prostej L. $\square$

Zadania. Udowodnij.

1. Dane są punkty niewspółliniowe a, b, c oraz prosta L, która ma punkt wspólny z wnętrzem trójkąta $\triangle abc$. Wówczas przekrój prostej L i wnętrza trójkąta $\triangle abc$ jest równy odcinkowi $\overline{pq}$, gdzie p i q są punktami wspólnymi prostej L i brzegu trójkąta $\triangle abc$.

2. Jeśli punkty niewspółliniowe a, b, c należą do zbioru wypukłego W to domknięcie trójkąta $\triangle abc$ zawiera się w W.

3. Domknięcie trójkąta jest równe przekrojowi trzech półpłaszczyzn domkniętych.

4. Dane są punkty niewspółliniowe a, b, c. Wówczas przekrój $M_a^* \cap M_b^* \cap M_c^*$ jest pusty, gdzie M_a jest półpłaszczyzną o brzegu $\overleftrightarrow{bc}$, w której leży punkt a, M_b jest półpłaszczyzną o brzeu $\overleftrightarrow{ac}$, w której leży punkt b, a M_c jest półpłaszczyzną o brzeu $\overleftrightarrow{ab}$, w której leży punkt c.

5. Wnętrze trójkąta wyznacza wierzchołki tego trójkąta jednoznacznie.

2.5 Wielokąty

Wśród łamanych wyróżnimy pewną klasę, której elementy nazywamy wielokątami wypukłymi. Powiemy, że łamana $(a_1, \ldots, a_n)$ jest *wielokątem wypukłym*, gdy $n \geq 3$, każde dwa kolejne punkty tego ciągu są różne (tzn. $a_i \neq a_{i+1}$ dla $i \in \{1, \ldots, n-1\}$) oraz $a_n \neq a_1$, a ponadto dla każdego boku aa' tej łamanej wszystkie pozostałe wierzchołki leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{aa'}$.

Dla danego wielokąta wypukłego $W = (a_1, \ldots, a_n)$ oznaczmy przez L_1, ..., L_n proste wyznaczone przez boki, a przez M_1, ..., M_n półpłaszczyzny wyznaczone odpowiednio przez proste L_1, ..., L_n, przy czym dla każdego $i \in \{1, \ldots n\}$ wierzchołki wielokąta leżą w $L_i \cup M_i$. Przekrój $M_1 \cap \ldots \cap M_n$ nazywamy *wnętrzem* wielokąta wypukłego W.

Sumę wszystkich odcinków domkniętych wyznaczonych przez boki wielokąta nazywamy *brzegiem* wielokąta wypukłego.

Kątami wewnętrznymi wielokąta wypukłego $(a_1, \ldots, a_n)$ nazywamy kąty $\angle a_1a_2a_3$, ..., $\angle a_{n-2}a_{n-1}a_n$, $\angle a_{n-1}a_na_1$, $\angle a_na_1a_2$.

Uwaga. Nazwa „wielokąt wypukły" ma swoje uzasadnienie w wypukłości figury jaką jest wnętrze dowolnego wielokąta wypukłego (według podanej definicji). W istocie nie podaliśmy jednak do tej pory definicji dowolnego wielokąta i jego wnętrza. Mamy tutaj na myśli taką definicję, żeby wielokąt wypukły był jej szczególnym przypadkiem, a zarazem obejmował swoją definicją dokładnie te wielokąty (według szerszej definicji), których wnętrza są zbiorami wypukłymi.

Czworokątem wypukłym nazywamy wielokąt wypukły o czterech wierzchołkach. Czworokąty wypukłe odgrywają szczególną rolę.

Twierdzenie 2.22. *Dane są punkty a, b, c, d takie, że odcinki $\overline{ac}$ oraz $\overline{bd}$ przecinają się w dokładnie jednym punkcie. Wówczas $\square abcd$ jest czworokątem wypukłym.*

Dowód. Ustalmy punkty a, b, c, d takie jak w założeniach i oznaczmy przez o jedyny punkt przecięcia odcinków $\overline{ac}$ oraz $\overline{bd}$. Wówczas punkty c i o leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{ab}$, a także punkty d i o leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{ab}$. Wobec przechodniości relacji leżenia po tej samej stronie prostej punkty c i d leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{ab}$. Pozostałe zależności dowodzimy analogicznie. $\square$

Twierdzenie 2.23. *Dane są (parami różne) punkty a, b, c, d takie, że c i d leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{ab}$, a i d leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{bc}$, zaś a i b leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{cd}$. Wówczas odcinki $\overline{ac}$ oraz $\overline{bd}$ mają dokładnie jeden punkt wspólny, a $\square abcd$ jest czworokątem wypukłym.*

Dowód. Ustalmy punkty a, b, c, d takie jak w założeniach. Na podstawie twierdzenia 2.18 punkt a leży wewnątrz kąta $\angle bcd$, a punkt d leży wewnątrz kąta $\angle abc$. Stąd na mocy twierdzenia 2.15 odcinek $\overline{bd}$ ma punkt wspólny o z półprostą $\overrightarrow{ca}$, a odcinek $\overline{ac}$ ma punkt wspólny o' z półprostą $\overrightarrow{bd}$. Ponieważ proste $\overleftrightarrow{ac}$ oraz $\overleftrightarrow{bd}$ są różne, więc $o = o'$, czyli odcinki $\overline{ac}$ oraz $\overline{bd}$ mają dokładnie jeden punkt wspólny. Z twierdzenia 2.22 wynika, że $\square abcd$ jest czworokątem wypukłym. $\square$

Twierdzenie 2.23 mówi w szczególności, że przekątne czworokąta wypukłego się przecinają.

Twierdzenie 2.24. *Dane są (parami różne) punkty a, b, c, d takie, że c i d leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{ab}$, a i b leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{cd}$, zaś a i c leżą po różnych stronach prostej $\overleftrightarrow{bd}$. Wówczas $\square abcd$ jest czworokątem wypukłym.*

Dowód. Ustalmy punkty a, b, c, d takie jak w założeniach. Wówczas istnieje punkt o leżący na prostej $\overleftrightarrow{bd}$ taki, że zachodzi $B(aoc)$. Na podstawie przechodniości relacji leżenia po tej samej stronie prostej punkty o i d leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{ab}$, a więc $\neg B(obd)$. Analogicznie stwierdzamy, że punkty o i b leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{cd}$, a więc także $\neg B(odb)$. Ponieważ punkty o, b, d są współliniowe i różne, więc zachodzi $B(bod)$. Z twierdzenia 2.22 wynika, że $\square abcd$ jest czworokątem wypukłym. $\square$

Zadania. Udowodnij.

1. Jeśli $\square abcd$ jest czworokątem wypukłym, to proste $\overleftrightarrow{ab}$ oraz $\overleftrightarrow{cd}$ są równoległe lub przecinają się w dokładnie jednym punkcie p takim, że albo zachodzi $B(abp)$ i $B(dcp)$ albo zachodzi $B(pab)$ i $B(pdc)$.

2. Dany jest czworokąt wypukły $\square abcd$ oraz punkty $p \in \overline{ab}$, $q \in \overline{bc}$, $r \in \overline{cd}$, $s \in \overline{da}$. Wówczas $\square pqrs$ jest czworokątem wypukłym.

3. Wnętrze czworokąta wypukłego $\square abcd$ jest równe sumie wnętrza trójkąta $\triangle abc$, odcinka $\overline{ac}$ i wnętrza trójkąta $\triangle cda$.

4. Dany jest czworokąt wypukły $\square abcd$ oraz prosta L różna od prostej $\overleftrightarrow{ab}$, która ma punkt wspólny z odcinkiem $\overline{ab}$. Wówczas prosta L przechodzi przez jeden z punktów c, d lub przecina jeden z odcinków $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{da}$.

2.6 Półproste zgodnie zorientowane i równoległe

Mówimy, że półproste A i B są *zgodnie zorientowane*, gdy są zawarte w tej samej prostej (czyli $L(A) = L(B)$) oraz zachodzi jeden z warunków:

- $A = B$.
- $o(A) \in B$, $o(B) \in A^*$.
- $o(A) \in B^*$, $o(B) \in A$.

Mówimy, że półproste A i B są *przeciwnie zorientowane*, gdy są zawarte w tej samej prostej oraz nie są zgodnie zorientowane. Zatem półproste A i B są przeciwnie zorientowane wtedy i tylko wtedy, gdy $L(A) = L(B)$ oraz zachodzi jeden z warunków:

- $A = B^*$.
- $o(A) \in B$, $o(B) \in A$.
- $o(A) \in B^*$, $o(B) \in A^*$.

Twierdzenie 2.25. *Dla dowolnej prostej L relacja zgodnego zorientowania w zbiorze wszystkich półprostych zawartych w L jest relacją równoważności o dokładnie dwóch klasach abstrakcji.*

Dowód. Ustalmy prostą L i rozważmy relację zgodnego zorientowania dla półprostych zawartych w L. Bezpośrednio z definicji wynika, że ta relacja jest zwrotna i symetryczna. Dla dowodu przechodniości ustalmy półproste A, B, C zawarte w prostej L o początkach odpowiednio w punktach a, b, c i załóżmy, że A i B są zgodnie zorientowane oraz B i C są zgodnie zorientowane. Możemy założyć, że $a \neq b$ oraz $b \neq c$. Rozważmy przypadki:

(a) $a \in B$, $b \in A^*$ oraz $b \in C$, $c \notin B$. Wówczas $B(abc)$ oraz $a \in C$, $c \in A^*$.

(b) $a \in B^*$, $b \in A$ oraz $b \in C^*$, $c \in B$. Wówczas $B(abc)$ oraz $a \in C^*$, $c \in A$.

(c) $a \in B$, $b \in A^*$ oraz $b \in C^*$, $c \in B$. Wówczas $B(bac)$ lub $a = c$ lub $B(bca)$. W pierwszym przypadku $c \in A$, $a \in C^*$, w drugim przypadku $A = C$, a w trzecim przypadku $c \in A^*$, $a \in C$.

(d) $a \in B^*$, $b \in A$ oraz $b \in C$, $c \in B^*$. Wówczas $B(bac)$ lub $a = c$ lub $B(bca)$. W pierwszym przypadku $c \in A^*$, $a \in C$, w drugim przypadku $A = C$, a w trzecim przypadku $c \in A$, $a \in C^*$.

W każdym przypadku półproste A i C są zgodnie zorientowane. Dla dowodu, że klasy abstrakcji są dokładnie dwie, weźmy punkt o leżący na prostej L i rozważmy dopełniające półproste A i B zawarte w L o początku o. Wówczas A i B są przeciwnie zorientowane, a każda półprosta zawarta w L jest zgodnie zorientowana z A lub zgodnie zorientowana z B. □

Rodzinę $\mathcal{D}$ nazywamy *osią* prostej L, gdy $\mathcal{D}$ jest klasą abstrakcji względem relacji zgodnego zorientowania wszystkich półprostych zawartych w L. Gdy $\mathcal{D}$ jest osią prostej L, to drugą z osi prostej L oznaczamy $\mathcal{D}^*$. Zachodzi $(\mathcal{D}^*)^* = \mathcal{D}$.

Półproste A i B nazywamy *równoległymi*, co oznaczamy $A \parallel B$, gdy proste $L(A)$ i $L(B)$ są równoległe oraz zachodzi jeden z warunków:

(A) Półproste A i B są zgodnie zorientowane.

(B) Proste $L(A)$, $L(B)$ są rozłączne, a półproste A i B leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{o(A)o(B)}$.

Relacja równoległości półprostych jest zwrotna i symetryczna.[3]

Twierdzenie 2.26. *Jeśli półproste A i B są zgodnie zorientowane, a półproste B i C są równoległe, to A i C są równoległe.*

Dowód. Ustalmy półproste A, B i C o początkach odpowiednio a, b i c takie, że A i B są zgodnie zorientowane, a B i C są równoległe. Rozważmy przypadki:

(a) Półproste B i C są zgodnie zorientowane. Wówczas półproste A, B i C są zawarte w tej samej prostej L. Z przechodniości relacji zgodnego zorientowania półprostych zawartych w L wynika, że półproste A i C są zgodnie zorientowane, a więc równoległe.

(b) Proste $L(B)$, $L(C)$ są rozłączne, a półproste B i C leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{bc}$. Możemy założyć, że $A \neq B$ i wobec tego rozważamy kolejne przypadki:

   (i) $a \in B$, $b \in A^*$. Weźmy punkt p leżący na półprostej C. Wówczas na podstawie twierdzenia 2.23 łamana $\square abcp$ jest czworokątem wypukłym, a punkty b i p leżą po różnych stronach prostej $\overleftrightarrow{ac}$. Zatem (ponieważ punkt b leży na półprostej A^*) półproste A i C leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{ac}$ tzn. A i C są równoległe.

   (ii) $a \in B^*$, $b \in A$. Weźmy punkt p leżący na półprostej C. Wówczas punkty a i p leżą po różnych stronach prostej $\overleftrightarrow{bc}$ i na mocy twierdzenia 2.24 łamana $\square bacp$ jest czworokątem wypukłym. Stąd (ponieważ punkt b leży na półprostej A) półproste A i C leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{ac}$ tzn. A i C są równoległe.

[3] Mogłoby się wydawać, że relacja równoległości jest też zawsze przechodnia. W rzeczywistości jest tak dopiero po dołączeniu pewnika Euklidesa.

$\square$

Dwie osie $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ nazywamy *równoległymi*, co oznaczamy $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$, gdy półproste A oraz A' są równoległe, gdzie $A \in \mathcal{D}$ oraz $A' \in \mathcal{D}'$ — zgodnie z twierdzeniem 2.26 definicja ta nie zależy od wyboru reprezentantów A oraz A'.

Gdy $\mathcal{D}$ jest osią prostej L, a $\mathcal{D}'$ jest osią prostej L', przy czym proste L oraz L' są równoległe, to albo $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$ albo $\mathcal{D}^* \parallel \mathcal{D}'$.

Mówimy, że półprosta A o początku a jest *granicznie równoległa* do półprostej B o początku b, gdy zachodzi jeden z następujących warunków.

(A) Półproste A i B są zgodnie zorientowane.

(B) Półproste A i B są rozłączne, punkty a i b są różne oraz dla każdej półprostej P o początku a takiej, że $A - P - \overrightarrow{ab}$, półproste B i P mają punkt wspólny.

Twierdzenie 2.27. *Jeśli półprosta A jest granicznie równoległa do półprostej B, to A i B są równoległe.*

Dowód. Ustalmy półproste A i B takie, że A jest granicznie równoległa do B. Możemy założyć, że zachodzi warunek (B) definicji granicznej równoległości. Istnieje półprosta P taka, że $A - P - \overrightarrow{ab}$, a wobec spełnionego warunku ma ona punkt wspólny z półprostą B. Stąd półproste A i B leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{ab}$. Pozostaje sprawdzić, że proste $L(A)$ i $L(B)$ są rozłączne. Przypuśćmy, że przecinają się one w punkcie p. Punkt p leży na półprostych A^* oraz B^*. Weźmy punkt q taki, że $B(bpq)$. Wówczas zachodzi $\overrightarrow{ab} - A^* - \overrightarrow{aq}$ i (dwukrotnie) na mocy twierdzenia 2.16 także $A - \overrightarrow{aq}^* - \overrightarrow{ab}$. Wobec warunku (B) półprosta $\overrightarrow{aq}^*$ ma punkt wspólny z półprostą B. Jednak tym punktem wspólnym musi być punkt q, który leży na B^*. Otrzymana sprzeczność kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 2.28. *Dla dowolnej półprostej B i punktu a istnieje co najwyżej jedna półprosta A o początku a granicznie równoległa do B.*

Dowód. Ustalmy półprostą B oraz punkt a. Możemy założyć, że punkt a nie leży na prostej $L(B)$. Niech A oraz A' będą dwiema różnymi półprostymi o początku a granicznie równoległymi do półprostej B. Wówczas półproste

A oraz A leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{ab}$, co półprosta B. Na podstawie twierdzenia 2.17 zachodzi $\overrightarrow{ab} - A - A'$ lub $\overrightarrow{ab} - A' - A$. Wobec warunku (B) definicji granicznej równoległości, w pierwszym przypadku półprosta A przecina półprostą B, a w drugim przypadku półprosta A' przecina B. Otrzymana sprzeczność kończy dowód. □

Mówimy, że kąty AB i A_1B_1 są *odpowiadające* utworzone przez proste L i L_1 przecięte prostą K, gdy K i L przecinają się w punkcie o będącym wierzchołkiem kąta AB, proste K i L_1 przecinają się w (innym) punkcie o_1 będącym wierzchołkiem kąta A_1B_1, półproste A i A_1 są zawarte w K oraz zgodnie zorientowane, zaś półproste B i B_1 są zawarte odpowiednio w L i L_1 oraz leżą po tej samej stronie K. [4]

Mówimy, że kąty AB i A_1B_1 są *naprzemianległe* utworzone przez proste L i L_1 przecięte prostą K, gdy K i L przecinają się w punkcie o będącym wierzchołkiem kąta AB, proste K i L_1 przecinają się w (innym) punkcie o_1 będącym wierzchołkiem kąta A_1B_1, półproste A i A_1 są zawarte w K oraz przeciwnie zorientowane, zaś półproste B i B_1 są zawarte odpowiednio w L i L_1 oraz leżą po różnych stronach K. Jeśli punkty o i o_1 leżą odpowiednio na półprostych A_1 i A, to mówimy, że kąty te są naprzemianległe *wewnętrznie.* W przypadku przeciwnym tzn. jeśli punkty o i o_1 leżą odpowiednio na półprostych A_1^* i A^*, to mówimy, że kąty te są naprzemianległe *zewnętrznie.*

Mówimy, że kąty AB i A_1B_1 są *jednostronne* utworzone przez proste L i L_1 przecięte prostą K, gdy K i L przecinają się w punkcie o będącym wierzchołkiem kąta AB, proste K i L_1 przecinają się w (innym) punkcie o_1 będącym wierzchołkiem kąta A_1B_1, półproste A i A_1 są zawarte w K oraz przeciwnie zorientowane, zaś półproste B i B_1 są zawarte odpowiednio w L i L_1 oraz leżą po tej samej stronie K. Jeśli punkty o i o_1 leżą odpowiednio na półprostych A_1 i A, to mówimy, że kąty te są jednostronne *wewnętrznie.* W przypadku przeciwnym tzn. jeśli punkty o i o_1 leżą odpowiednio na półprostych A_1^* i A^*, to mówimy, że kąty te są jednostronne *zewnętrznie.*

Zadania. Udowodnij.

[4] Definicja ta oraz dwie kolejne odwołują się do ustalonej kolejności półprostych A i B oraz półprostych A_1 i B_1. Formalnie definicje te należy rozumieć w ten sposób, że są one spełnione, gdy istnieje taka kolejność półprostych A, B oraz A_1, B_1, że zachodzi odpowiedni warunek.

1. Dane są półproste A i B zawarte w tej samej prostej. Wówczas A i B są zgodnie zorientowane wtedy i tylko wtedy, gdy $A \subseteq B$ lub $B \subseteq A$.

2. Jeśli półproste A i B są równoległe, to półproste A^* i B^* są równoległe.

3. Jeśli półproste B i C są zgodnie zorientowane oraz półprosta A jest granicznie równoległa do B, to A jest granicznie równoległa do C.

2.7 Orientacja płaszczyzny

Jeśli $\mathcal{D}$ jest osią prostej L oraz punkt o leży na L, to dokładnie jedna półprosta z dwóch półprostych o początku o zawartych w L należy do $\mathcal{D}$. Tę półprostą oznaczamy $A(\mathcal{D}, o)$.

Rozważmy rodzinę $\mathcal{A}$ wszystkich par postaci $(\mathcal{D}, H)$, gdzie $\mathcal{D}$ jest osią pewnej prostej L, a H jest półpłaszczyzną o brzegu L. Indeksujemy tę rodzinę w następujący sposób $\mathcal{A} = \{(\mathcal{D}_\alpha, H_\alpha)\colon \alpha \in \mathcal{A}\}$, gdzie $\mathcal{D}_\alpha$ jest orientacją prostej L_α oraz L_α jest brzegiem H_α. Mówimy, że pary $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ *wyznaczają tę samą orientację płaszczyzny*, gdy zachodzi jeden z następujących warunków.

(A) $L_\alpha = L_\beta$ oraz

 (1) $\mathcal{D}_\alpha = \mathcal{D}_\beta$ oraz $H_\alpha = H_\beta$ lub

 (2) $\mathcal{D}_\alpha = \mathcal{D}^*_\beta$ oraz $H_\alpha = H^*_\beta$.

(B) $L_\alpha \cap L_\beta = \emptyset$ oraz

 (1) $\mathcal{D}_\alpha \parallel \mathcal{D}_\beta$ oraz $(L_\alpha \subseteq H_\beta \wedge L_\beta \subseteq H^*_\alpha) \vee \Big(L_\alpha \subseteq H^*_\beta \wedge L_\beta \subseteq H_\alpha\Big)$ lub

 (2) $\mathcal{D}^*_\alpha \parallel \mathcal{D}_\beta$ oraz $(L_\alpha \subseteq H_\beta \wedge L_\beta \subseteq H_\alpha) \vee \Big(L_\alpha \subseteq H^*_\beta \wedge L_\beta \subseteq H^*_\alpha\Big)$.

(C) $L_\alpha \cap L_\beta = \{o\}$ dla pewnego punktu o oraz

 (1) $(A(\mathcal{D}_\alpha, o) \subseteq H_\beta \wedge A(\mathcal{D}_\beta, o) \subseteq H^*_\alpha)$ lub

 (2) $\Big(A(\mathcal{D}_\alpha, o) \subseteq H^*_\beta \wedge A(\mathcal{D}_\beta, o) \subseteq H_\alpha\Big)$.

Twierdzenie 2.29. *Relacja wyznaczania tej samej orientacji płaszczyzny w zbiorze $\mathcal{A}$ jest relacją równoważności o dokładnie dwóch klasach abstrakcji.*

Dowód twierdzenia 2.29 pomijamy. Każdą z klas abstrakcji względem relacji wyznaczania tej samej orientacji nazywamy *orientacją* (płaszczyzny $\mathbb{P}$). Jeśli $\mathcal{O}$ jest orientacją, to drugą orientację oznaczamy $\mathcal{O}^*$. Zachodzi $(\mathcal{O}^*)^* = \mathcal{O}$.

Jeśli (A, B) jest kątem skierowanym o wierzchołku o oraz $L(A) \neq L(B)$, to oznaczamy

$$\mathcal{O}(A, B) := [([A], H)],$$

gdzie H jest tą półpłaszczyzną o brzegu $L(A)$, w której zawiera się półprosta B.

Jeśli punkty a, b, c sa niewspółliniowe, to oznaczamy

$$\mathcal{O}(a, b, c) := [([\overrightarrow{ab}], H)],$$

gdzie H jest tą półpłaszczyzną o brzegu $\overleftrightarrow{ab}$, w której leży punkt c.

Mówimy, że kąty skierowane (A, B) oraz (A', B') są *zgodnie zorientowane*, gdy zachodzi jeden z następujących warunków.

(A) (A, B) oraz (A', B') są kątami zerowymi.

(B) (A, B) oraz (A', B') są kątami półpełnymi.

(C) AB oraz $A'B'$ są kątami oraz $\mathcal{O}(A, B) = \mathcal{O}(A', B')$.

Relacja zgodnego zorientowania kątów skierowanych jest relacją równoważności.

Zadania. Udowodnij.

1. Jeśli punkty a, b, c są niewspółliniowe, to $\mathcal{O}(a, b, c) = \mathcal{O}(c, a, b) = \mathcal{O}(b, a, c)^*$.
2. Jeśli AB jest kątem, to $\mathcal{O}(A, B) = \mathcal{O}(B, A)^*$.

2.8 Aksjomat ciągłości

We współczesnych teoriach geometrii zazwyczaj przyjmuje się następujący aksjomat ciągłości. Jest on nazywany czasem aksjomatem Dedekinda ze względu na analogię do własności Dedekinda zbiorów liniowo uporządkowanych.

C1. *Dla dowolnego podziału prostej L na dwa zbiory X, Y niepuste, rozłączne, sumujące się do L, oraz wypukłe, istnieje punkt p leżący na L taki, że dla dowolnych punktów $x \in X \setminus \{p\}$, $y \in Y \setminus \{p\}$ zachodzi $B(xpy)$.*

Wszystkie twierdzenia tego podrozdziału są konsekwencjami aksjomatów incydencji (bez pewnika Euklidesa) i aksjomatów uporządkowania wraz z aksjomatem ciągłości. Ta teoria bywa nazywana *geometrią uporządkowania.*

Aksjomat ciągłości wzmacnia się do następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2.30.$^{\mathbf{C}}$ *Dla dowolnego podziału prostej L na dwa zbiory X, Y niepuste, rozłączne, sumujące się do L, oraz wypukłe, istnieje punkt p leżący na L taki, że zbiory X, Y są dopełniającymi półprostymi o początku p (z których jedna jest domknięta).*

Dowód. Ustalmy prostą L i zbiory X, Y takie jak w założeniach. Niech p będzie punktem, o którym mowa w aksjomacie C1 i dla ustalenia uwagi załóżmy, że $p \in Y$. Gdyby zbiór Y był jednoelementowy, to istniałyby punkty $x, x' \in X$ takie, że $B(xpx')$, a więc X nie byłby wypukły. Zatem istnieje punkt $y \in Y$ różny od punktu p. Dla dowolnych punktów $x, x' \in X$ zachodzi $B(xpy)$ oraz $B(x'py)$, a więc $B(pxx')$ lub $x = x'$ lub $B(px'x)$ tzn. zbiór X jest półprostą o początku p. □

Twierdzenie 2.31.$^{\mathbf{C}}$ *Dany jest podział półprostej A o początku w punkcie o na dwa zbiory X, Y niepuste, sumujące się do A i takie, że dla wszystkich $x \in X$, $y \in Y$ zachodzi $B(oxy)$. Wówczas istnieje punkt p leżący na półprostej A taki, że $\overline{op} \subseteq X$ oraz $\overrightarrow{po}^* \subseteq Y$.*

Dowód. Ustalmy półprostą A o początku w punkcie o oraz zbiory X, Y takie jak w założeniach. Przyjmijmy $X' := A^* \cup \{o\} \cup X$. Zbiory X' oraz Y są niepuste, rozłączne i sumują się do prostej $L = L(A)$. Pokażemy, że zbiory X' oraz Y są wypukłe.

Przypuśćmy, że istnieją różne punkty $x_1, x_2 \in X'$ oraz punkt $y \in Y$ takie, że $B(x_1yx_2)$. Wówczas dla $i \in \{1, 2\}$ zachodzi $\overrightarrow{yx_i} = \overrightarrow{yo}$ (w przypadku $x_i \in X$ wynika to z założenia $B(ox_iy)$). Stąd mamy $\overrightarrow{yx_1} = \overrightarrow{yo} = \overrightarrow{yx_2}$, co jest sprzeczne z $B(x_1yx_2)$. Zatem X' jest wypukły.

Przypuśćmy teraz, że istnieją różne punkty $y_1, y_2 \in Y$ oraz punkt $x \in X'$ takie, że $B(y_1xy_2)$. Wówczas (z wypukłości półprostej A) jest $x \in X$, a następnie wobec założenia mamy $\overrightarrow{xy_1} = \overrightarrow{xb}^* = \overrightarrow{xy_2}$, co jest sprzeczne z $B(y_1xy_2)$. Zatem Y jest wypukły.

Korzystając z twierdzenia 2.31 istnieje punkt p leżący na prostej L taki, że zbiory X' oraz Y są dopełniającymi półprostymi o początku p. Wówczas punkt p leży na półprostej A, bo w przeciwnym razie jeden ze zbiorów X', Y byłby zawarty w $A^* \cup \{o\}$, co jest niemożliwe. Ponieważ $o \in X'$, więc $\overrightarrow{po} \subseteq X'$ oraz $\overrightarrow{po}^* \subseteq Y$. Skoro $\overrightarrow{op}^* = A^*$, to $\overline{op} \subseteq X$. $\square$

Twierdzenie 2.32.$^{\mathbf{C}}$ *Dany jest podział odcinka $\overline{ab}$ na dwa zbiory X, Y niepuste, sumujące się do $\overline{ab}$ i takie, że dla wszystkich $x \in X$, $y \in Y$ zachodzi $B(axy)$. Wówczas istnieje punkt p leżący na odcinku $\overline{ab}$ taki, że $\overline{ap} \subseteq X, \overline{pb} \subseteq Y$.*

Dowód. Ustalmy różne punkty a, b oraz zbiory X, Y takie jak w założeniach. Przyjmijmy $Y' := Y \cup \{b\} \cup \overrightarrow{ba}^*$. Zbiory X oraz Y' są niepuste i sumują się do półprostej $A = \overrightarrow{ab}$. Spełnione są założenia twierdzenia 2.31 dla półprostej A i zbiorów X, Y'. Istnieje punkt p leżący na półprostej A taki, że $\overline{ap} \subseteq X$ oraz $\overrightarrow{pa}^* \subseteq Y'$. Punkt p leży na odcinku $\overline{ab}$, gdyż w przeciwnym razie $\overline{ab} \subseteq \overline{ap}$, zbiór $Y \subseteq Y' \cap \overline{ab}$ jest niepusty, a zbiory Y' oraz $\overline{ap}$ są rozłączne. Skoro $\overrightarrow{pa}^* = \overrightarrow{pb}$ oraz $\overline{pb} \subseteq \overline{ab}$, to $\overline{pb} \subseteq Y$. $\square$

Twierdzenie 2.33.$^{\mathbf{C}}$ *Dla danego kąta AB o wierzchołku o oznaczmy przez $\mathcal{K}$ rodzinę wszystkich półprostych leżących między półprostymi A i B. Dany jest podział rodziny $\mathcal{K}$ na dwie rodziny $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ niepuste, sumujące się do $\mathcal{K}$ i takie, że dla dowolnych półprostych $X \in \mathcal{X}$, $Y \in \mathcal{Y}$ zachodzi $A - X - Y$. Wówczas istnieje półprosta $P \in \mathcal{K}$ taka, że z warunku $A - X - P$ wynika $X \in \mathcal{X}$, a z warunku $P - Y - B$ wynika $Y \in \mathcal{Y}$.*

Dowód. Ustalmy półproste A, B oraz rodziny $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ takie jak w założeniach. Weźmy punkt a leżący na półprostej A oraz punkt b leżący na półprostej B. Dzielimy odcinek $\overline{ab}$ na dwa zbiory

$$X^* := \{x \in \overline{ab} \colon \overrightarrow{ox} \in \mathcal{X}\},$$

$$Y^* := \{y \in \overline{ab} \colon \overrightarrow{oy} \in \mathcal{Y}\}.$$

Zbiory X^* oraz Y^* spełniają założenia twierdzenia 2.32 dla odcinka $\overline{ab}$. Istnieje więc punkt p leżący na odcinku $\overline{ab}$ taki, że $\overline{ap} \subseteq X^*, \overline{pb} \subseteq Y^*$. Kładąc $P := \overrightarrow{op}$, dostajemy szukaną półprostą. □

Twierdzenie 2.34.$^{\mathbf{C}}$ *Dla danej półpłaszczyzny M o brzegu L i półprostej A o początku w punkcie o zawartej w L oznaczmy przez $\mathcal{H}$ rodzinę wszystkich półprostych o początku w punkcie o zawartych w półpłaszczyźnie M. Dany jest podział rodziny $\mathcal{H}$ na dwie rodziny $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ niepuste, sumujące się do $\mathcal{H}$ i takie, że dla dowolnych półprostych $X \in \mathcal{X}$, $Y \in \mathcal{Y}$ zachodzi $A - X - Y$. Wówczas istnieje półprosta $P \in \mathcal{H}$ taka, że z warunku $A - X - P$ wynika $X \in \mathcal{X}$, a z warunku $P - Y - A^*$ wynika $Y \in \mathcal{Y}$.*

Dowód. Ustalmy półpłaszczyznę M, półprostą A oraz zbiory $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ takie jak w założeniach. Ponieważ zbiór $\mathcal{Y}$ jest niepusty, istnieje półprosta $Y_0 \in \mathcal{Y}$. Rozważmy rodzinę $\mathcal{K}$ wszystkich półprostych leżących między półprostymi A i Y_0 oraz przyjmijmy $\mathcal{Y}' = \mathcal{K} \cap \mathcal{Y}$. Jeśli rodzina $\mathcal{Y}'$ jest pusta, to półprosta $P := Y_0$ spełnia żądane warunki. Załóżmy, że rodzina $\mathcal{Y}'$ jest niepusta. Rodziny $\mathcal{X}, \mathcal{Y}'$ spełniają założenia twierdzenia 2.33. Istnieje więc półprosta $P \in \mathcal{K}$ taka, że z warunku $A - X - P$ wynika $X \in \mathcal{X}$, a z warunku $P - Y - Y_0$ wynika $Y \in \mathcal{Y}'$. Wówczas z warunku $P - Y - A^*$ wynika $P - Y - Y_0$ lub $Y = Y_0$ lub $Y_0 - Y - A^*$, a w każdym przypadku zachodzi $Y \in \mathcal{Y}$. □

Twierdzenie 2.35.$^{\mathbf{C}}$ *Dla dowolnej półprostej B i punktu a istnieje dokładnie jedna półprosta A o początku a granicznie równoległa do B.*

Dowód. Ustalmy półprostą B o początku w punkcie b oraz punkt a. Jeśli punkt a leży na prostej $L(B)$, to za A przyjmujemy półprostą zgodnie zorientowaną z półprostą B. Załóżmy więc, że punkt a nie leży na prostej $L(B)$ i rozważmy rodzinę $\mathcal{H}$ wszystkich półprostych o początku a, które leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{ab}$, co półprosta B. Rodzinę $\mathcal{H}$ dzielimy na dwa zbiory $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ w ten sposób, że do $\mathcal{X}$ zaliczamy te półproste, które przecinają B, zaś do $\mathcal{Y}$ te półproste, które nie przecinają B. Dla dowolnych półprostych $X \in \mathcal{X}$, $Y \in \mathcal{Y}$ zachodzi $\overrightarrow{ab} - X - Y$. Na mocy twierdzenia 2.34 istnieje półprosta A taka, że dowolna półprosta C spełniająca $\overrightarrow{ab} - C - A$ przecina B, zaś dowolna półprosta D spełniająca $\overrightarrow{ab} - A - D$ nie przecina B. Pozostaje wykazać, że półprosta A nie przecina półprostej B. Przypuśćmy, że półproste A i B mają punkt wspólny p. Istnieje wtedy punkt q taki, że

$B(bpq)$. Wówczas półprosta $D := \overrightarrow{aq}$ przecina B oraz zachodzi $\overrightarrow{ab} - A - D$, co przeczy otrzymanej własności.

Jednoznaczność półprostej A wynika z twierdzenia 2.28. □

Twierdzenie 2.36.[C] *Dla dowolnej prostej L i punktu a istnieje (co najmniej jedna) prosta równoległa do L i przechodząca przez a.*

Dowód. Ustalmy prostą L oraz punkt a. Weźmy półprostą B zawartą w L. Na podstawie twierdzenia 2.35 istnieje półprosta A o początku w punkcie a granicznie równoległa do półprostej B. Na mocy twierdzenia 2.27 półproste A i B są równoległe, a więc w szczególności proste $L(A)$ i $L = L(B)$ są równoległe. □

2.9 Postulat o równoległych w geometrii uporządkowania

Rozważania tej sekcji dotyczą teorii opartej na aksjomatach incydencji wraz z pewnikiem Euklidesa oraz aksjomatów uporządkowania. Nie korzystamy przy tym z aksjomatu ciągłości C1.

Twierdzenie 2.37.[E] *Spośród trzech prostych (parami) rozłącznych dwie z nich leżą po różnych stronach trzeciej.*

Dowód. Ustalmy proste L_1, L_2, L_3 parami rozłączne. Znajdźmy punkty a i b leżące odpowiednio na prostych L_1 i L_2, a następnie poprowadźmy prostą K przez a i b. Z aksjomatu równoległości R1 prosta K przecina prostą L_3 w pewnym punkcie c. Na podstawie aksjomatu B4 zachodzi $B(abc)$ lub $B(bac)$ lub $B(acb)$. W przypadku $B(abc)$ proste L_1 oraz L_3 leżą po różnych stronach prostej L_2. W pozostałych przypadkach mamy analogiczne zależności. □

Poniższe twierdzenie mówi, że (przy odpowiednich założeniach) rzutowanie równoległe zachowuje relację leżenia między.

Twierdzenie 2.38.[E] *Dane są proste nierównoległe L oraz K oraz punkty a, b, c takie, że $B(abc)$ oraz wspólna prosta tych punktów jest nierównoległa do*

K. Wówczas zachodzi $B(a^*b^*c^*)$, gdzie a^*, b^*, c^* powstają przez rzutowanie równoległe punktów odpowiednio a, b, c na prostą L w kierunku prostej K.

Dowód. Ustalmy proste L, K oraz punkty a, b, c takie jak założeniach. Niech K_a, K_b, K_c będą prostymi równoległymi do prostej K przechodzącymi odpowiednio przez punkty a, b, c. Punkty a i c leżą po różnych stronach prostej K_b, a z równoległości proste K_a i K_c leżą po różnych stronach K_b. W szczególności punkty a^* i c^* leżą po różnych stronach prostej K_b oraz zachodzi $B(a^*b^*c^*)$. $\square$

Twierdzenie 2.39.$^{\mathbf{E}}$ *Dla danej półprostej A i punktu p istnieje dokładnie jedna półprosta o początku w p równoległa do A.*

Dowód. Ustalmy półprostą A o początku w punkcie a oraz punkt p. Na podstawie aksjomatu równoległości przez punkt p przechodzi dokładnie jedna prosta L równoległa do $L(A)$. W przypadku $L = L(A)$ dokładnie jedna z półprostych o początku p zawartych w prostej L jest zgodnie zorientowana z półprostą A, a w przypadku $L(A) \cap L = \emptyset$ dokładnie jedna z półprostych o początku p zawartych w L leży po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{ap}$, co A. $\square$

Twierdzenie 2.40.$^{\mathbf{E}}$ *Relacja równoległości półprostych jest relacją równoważności.*

Dowód. Zwrotność i symetria wynikają bezpośrednio z definicji. Dla dowodu przechodniości ustalmy półproste A, B, C o początkach odpowiednio w punktach a, b, c i załóżmy, że $A \parallel B, B \parallel C$. Rozważmy przypadki:

(a) $L(A) = L(B)$. Wówczas półproste A i B są zgodnie zorientowane, a z twierdzenia 2.26 wynika, że $A \parallel C$.

(b) $L(B) = L(C)$. Przypadek ten jest analogiczny do (a).

(c) $L(A) = L(C) \neq L(B)$. Wówczas jeżeli $a = c$, to $A = C$. Załóżmy zatem, że $a \neq c$, weźmy punkt p leżący na półprostej B i rozważmy przypadki:

   (i) $c \in A$. Wówczas z założenia $A \parallel B$ na mocy twierdzenia 2.23 dostajemy, że $\square acpb$ jest czworokątem wypukłym. W szczególności punkty a i p leżą po różnych stronach prostej $\overleftrightarrow{bc}$. Korzystając z założenia $B \parallel C$, dostajemy $a \in C^*$. Zatem półproste A i C są zgodnie zorientowane.

(ii) $a \in A^*$. Wówczas z założenia $A \parallel B$ na mocy twierdzenia 2.24 dostajemy, że $\square capb$ jest czworokątem wypukłym. W szczególności punkty a i p leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{bc}$. Korzystając z założenia $B \parallel C$, dostajemy $a \in C^*$. Zatem półproste A i C są zgodnie zorientowane.

(d) Proste $L(A)$, $L(B)$, $L(C)$ są parami różne. Wówczas prosta $\overleftrightarrow{ac}$ przecina prostą $L(B)$ w pewnym punkcie b'. Niech B' będzie półprostą o początku b' zawartą w $L(B)$, która jest zgodnie zorientowana z B. Na podstawie twierdzenia 2.26 półproste A, B' są równoległe oraz półproste B', C są równoległe. Zatem półproste A i C obie leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{ac}$, co półprosta B'.

$\square$

Klasy abstrakcji względem relacji równoległości półprostych nazywamy *zwrotami*.

Mówimy, że dwa zwroty $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ są *przeciwne*, gdy istnieją półproste $A \in \mathcal{E}$, $A' \in \mathcal{E}'$, które są wzajemnie dopełniające. Dla każdego zwrotu istnieje dokładnie jeden zwrot do niego przeciwny. Zwrot przeciwny do $\mathcal{E}$ oznaczamy $\mathcal{E}^*$. Zachodzi $(\mathcal{E}^*)^*$.

Jako wniosek z twierdzenia 2.39 dostajemy, że gdy $\mathcal{E}$ jest zwrotem oraz o jest punktem, to istnieje dokładnie jedna półprosta $A \in \mathcal{E}$ o początku o.

Twierdzenie 2.41.$^{\mathbf{E}}$ *Dane są półproste A, B o wspólnym początku oraz półproste A', B' o wspólnym początku, przy czym zachodzi $A \parallel A', B \parallel B'$. Wówczas kąty skierowane (A, B) oraz (A', B') są zgodnie zorientowane.*

Dowód. Ustalmy półproste A, B, A', B' takie jak w założeniach. Zauważmy, że $A = B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A' = B'$, zaś A i B są dopełniające wtedy i tylko wtedy, gdy A' i B' są dopełniające. Załóżmy zatem, że $L(A) \neq L(B)$ oraz $L(A') \neq L(B')$.

Gdy $L(A) = L(A')$, to półproste A, A' są zgodnie zorientowane, a półproste B, B' leżą po tej samej stronie prostej $L(A) = L(A')$ i wówczas

$\mathcal{O}(A, B) = \mathcal{O}(A', B')$. Gdy $L(B) = L(B')$, to na podstawie udowodnionej części mamy

$$\mathcal{O}(A, B) = \mathcal{O}(B, A)^* = \mathcal{O}(B', A')^* = \mathcal{O}(A', B').$$

W przypadku ogólnym z pewnika Euklidesa wynika, że półproste B oraz A' przecinają się w pewnym punkcie o. Niech A'_o będzie półprostą o początku w punkcie o zgodnie zorientowaną z półprostą A' i niech B_o będzie półprostą o początku o zgodnie zorientowaną z półprostą B. Na podstawie udowodnionej części mamy

$$\mathcal{O}(A, B) = \mathcal{O}(A'_o, B_o) = \mathcal{O}(A', B').$$

□

Zadania. Udowodnij.

1. Półproste są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy są granicznie równoległe.
2. Dla dowolnego kąta, nie istnieje prosta zawarta w całości w jego wnętrzu.
3. Dla dowolnego punktu we wnętrzu kąta, istnieje prosta przechodząca przez ten punkt, która przecina oba ramiona kąta.

Rozdział 3

Aksjomaty przystawania

Ostatnim pojęciem pierwotnym w teorii geometrii, którą opisujemy, są relacje przystawania. Pojęcia prostej, relacji leżenia między oraz przystawania razem są wystarczające do wyrażenia pełnego (kategorycznego) układu aksjomatów geometrii euklidesowej, ale również hiperbolicznej.

Rozszerzamy dotychczasową teorię geometrii uporządkowania o relacje przystawania — dwie relacje dwuargumentowe. Pierwsza to relacja $\equiv_O$ *przystawania odcinków* określona na zbiorze odcinków. Druga to relacja $\equiv_K$ *przystawania kątów* określona na zbiorze kątów. Są one oznaczane tym samym symbolem $\equiv$, gdy tylko nie prowadzi to do niejasności.

Uwaga. Zwracamy uwagę, że przyjęta przez na definicja kąta odwołuje się do pojęć prostej i relacji leżenia między. Podobnie (jak zobaczymy w tym rozdziale) aksjomaty przystawania odwołują się do pojęć takich jak np. półprosta, półpłaszczyzna, czyli pojęć, o których można twierdzić, że poprawność ich definicji istotnie zależy od aksjomatów incydencji i uporządkowania. We wszystkich teoriach, w których występuje pojęcie przystawania kątów, aksjomaty incydencji i uporządkowania są zakładane, więc nie prowadzi to do problemów.[1]

[1] Takie problemy mogłyby wystąpić na przykład w sytuacji, gdy chcielibyśmy mówić o niezależności któregoś z aksjomatów (nazwijmy go A) incydencji lub uporządkowania od grupy aksjomatów, wśród których występuje aksjomat używający pojęcia, którego poprawność definicji zależy od aksjomatu A. Tego typu problem w istocie jest tylko pozorny, bo każdą definicję daje się sprowadzić do takiej postaci, że jest ona niezależna od żadnych aksjomatów (chociaż czasem takie sprowadzenie można wykonać na kilka nierównoważnych sposobów).

Oto aksjomaty przystawania:

P1. *Relacje* $\equiv_O$ *oraz* $\equiv_K$ *są relacjami równoważności (odpowiednio na zbiorze odcinków i kątów).*

P2. *Dla dowolnego odcinka* pq *i dowolnej półprostej* A *o początku w punkcie* o *istnieje dokładnie jeden punkt* a *leżący na* A *taki, że* $oa \equiv pq$.

P3. *Dla dowolnego kąta* PQ*, dowolnej półpłaszczyzny* M *o brzegu* L *i dowolnej półprostej* A *o początku w punkcie* o *zawartej w* L *istnieje dokładnie jedna półprosta* B *o początku* o *zawarta w* M *taka, że* $PQ \equiv AB$.

P4. *Jeśli* $B(abc)$, $B(a_1b_1c_1)$ *oraz* $ab \equiv a_1b_1$, $bc \equiv b_1c_1$, *to* $ac \equiv a_1c_1$.

P5. *Jeśli punkty* a, b, c *są niewspółliniowe, punkty* a_1, b_1, c_1 *są niewspółliniowe oraz* $ab \equiv a_1b_1$, $bc \equiv b_1c_1$, $\angle abc \equiv \angle a_1b_1c_1$, *to* $\angle bac \equiv \angle b_1a_1c_1$.

W tym rozdziale badamy konsekwencje aksjomatów incydencji I1–I3, uporządkowania B1–B9 oraz przystawania P1–P5. Każdy model tej teorii nosi nazwę *płaszczyzny Hilberta*.

Relację $\equiv_O$ przystawania odcinków w naturalny sposób rozszerzamy na zbiór wszystkich podzbiorów jednoelementowych i dwuelementowych (tzn. dopuszczamy punkty równe). Mówimy, że $ab \equiv'_O cd$, gdy zachodzi jeden z warunków:

(A) $a = b$ oraz $c = d$.

(B) $a \neq b, c \neq d$ oraz $ab \equiv_O cd$.

Ponieważ relacja $\equiv'_O$ (w pewnym sensie) pokrywa się z relacją przystawania odcinków $\equiv_O$, oznaczamy ją po prostu symbolem $\equiv_O$ lub $\equiv$, o ile nie prowadzi to do niejasności.

Podobnie, rozszerzamy relację przystawania kątów na zbiór wszystkich par $AB = \{A, B\}$ takich, że A i B są półprostymi o wspólnym początku. Mówimy, że $AB \equiv'_K CD$, gdy zachodzi jeden z warunków:

(A) $A = B$ oraz $C = D$.

(B) $A = B^*$ oraz $C = D^*$.

(C) $L(A) \neq L(B)$, $L(C) \neq L(D)$ oraz $AB \equiv_K CD$.

Podobnie jak w przypadku odcinków, zamiast $\equiv'_K$ piszemy po prostu $\equiv_K$ lub $\equiv$, o ile nie prowadzi to do niejasności.

Twierdzenie 3.1. *Jeśli $B(abc)$, $B(a_1b_1c_1)$ oraz $ab \equiv a_1b_1$, $ac \equiv a_1c_1$, to $bc \equiv b_1c_1$.*

Dowód. Ustalmy punkty a, b, c, a_1, b_1, c_1 takie jak w założeniach. Na mocy aksjomatu P2 na półprostej $\overrightarrow{ba}^*$ istnieje punkt c' taki, że $bc' \equiv b_1c_1$. Wówczas $B(abc')$, więc na mocy aksjomatu P4 mamy $ac' \equiv a_1c_1$. Wtedy $ac \equiv a_1c_1 \equiv ac'$ oraz $c, c' \in \overrightarrow{ab}$. Stąd na podstawie aksjomatu P2 mamy $c = c'$, a więc $bc \equiv b_1c_1$. □

Twierdzenie 3.2. *Jeśli $B(a_1b_1c_1)$ oraz $ac \equiv a_1c_1$, to istnieje (dokładnie jeden) punkt b taki, że $B(abc)$ oraz $ab \equiv a_1b_1$, $bc \equiv b_1c_1$.*

Dowód. Ustalmy punkty a, c, a_1, b_1, c_1 takie jak w założeniach. Na półprostej $\overrightarrow{ac}$ znajdujemy na podstawie aksjomatu P2 punkt b taki, że $ab \equiv a_1b_1$. Następnie ponownie na mocy aksjomatu P2 znajdujemy na półprostej $\overrightarrow{ba}^*$ punkt c' taki, że $bc' \equiv b_1c_1$. Wówczas $B(abc')$ i na podstawie aksjomatu P4 dostajemy $ac' \equiv a_1c_1$. Mamy $ac' \equiv a_1c_1 \equiv ac$ oraz $c, c' \in \overrightarrow{ab}$. Stąd na mocy aksjomatu P2 otrzymujemy $c = c'$.

Jednoznaczność punktu b wynika z aksjomatu P2. □

Mówimy, że trójkąty $\triangle abc$ oraz $\triangle a_1b_1c_1$ są *przystające*, co zapisujemy $\triangle abc \equiv \triangle a_1b_1c_1$, gdy $ab \equiv a_1b_1$, $bc \equiv b_1c_1$, $ac \equiv a_1c_1$, $\angle bac \equiv \angle b_1a_1c_1$, $\angle abc \equiv \angle a_1b_1c_1$ oraz $\angle acb \equiv \angle a_1c_1b_1$.

Uwaga. Przystawania trójkątów w sensie powyższej definicji nie należy mylić z (w pewnym sensie ogólniejszym) pojęciem przystawania dowolnych figur. Mówimy, że figury $E \subseteq \mathbb{P}, F \subseteq \mathbb{P}$ są *przystające*, gdy istnieje bijekcja $f : E \to F$ taka, że dla dowolnych punktów $p, q \in E$ zachodzi warunek $pq \equiv f(p)f(q)$. Jak można się spodziewać (chociaż na razie tego nie dowodzimy), przystawanie trójkątów w sensie pierwszej definicji jest równoważne przystawaniu figur powstałych na bazie trójkąta takich jak domknięcie, wnętrze, brzeg lub zbiór (trójelementowy) złożony z wierzchołków danego trójkąta.

Poniższe twierdzenie wzmacnia aksjomat P5 — jest to tzw. cecha przystawania bok-kąt-bok.

Twierdzenie 3.3 (Cecha przystawania b-k-b)**.** *Dane są punkty niewspółliniowe a, b, c oraz punkty niewspółliniowe a_1, b_1, c_1. Jeśli $ab \equiv a_1b_1$, $bc \equiv b_1c_1$ oraz $\angle abc \equiv \angle a_1b_1c_1$, to $\triangle abc \equiv \triangle a_1b_1c_1$.*

Dowód. Ustalmy punkty a, b, c oraz punkty a_1, b_1, c_1 takie jak w założeniach. Wobec aksjomatu P5 mamy $\angle bac \equiv \angle b_1a_1c_1$ oraz ze względu na symetrię założeń także $\angle acb \equiv \angle a_1c_1b_1$. Na mocy aksjomatu P2 na półprostej $\overrightarrow{ac}$ istnieje punkt c' taki, że $ac' \equiv a_1c_1$. Z aksjomatu P5 zastosowanego do trójkątów $\triangle abc'$ oraz $\triangle a_1b_1c_1$ dostajemy $\angle abc' \equiv \angle a_1b_1c_1 \equiv \angle abc$. Stąd wobec aksjomatu P3 (a dokładnie części mówiącej o jednoznaczności) $\overrightarrow{bc} = \overrightarrow{bc'}$. W szczególności $\overleftrightarrow{bc} = \overleftrightarrow{bc'}$, więc na podstawie aksjomatu I2 mamy $c = c'$, a zatem $ac \equiv a_1c_1$. □

Twierdzenie 3.4 (Cecha przystawania k-b-k)**.** *Dane są punkty niewspółliniowe a, b, c oraz punkty niewspółliniowe a_1, b_1, c_1. Jeśli $ab \equiv a_1b_1$, $\angle abc \equiv \angle a_1b_1c_1$ oraz $\angle bac \equiv \angle b_1a_1c_1$, to $\triangle abc \equiv \triangle a_1b_1c_1$.*

Dowód. Ustalmy punkty a, b, c oraz punkty a_1, b_1, c_1 takie jak w założeniach. Z aksjomatu P2 na półprostej $\overrightarrow{bc}$ istnieje punkt c' taki, że $bc' \equiv b_1c_1$. Na podstawie aksjomatu P5 zastosowanego do trójkątów $\triangle abc'$ oraz $\triangle a_1b_1c_1$ dostajemy $\angle bac' \equiv \angle b_1a_1c_1 \equiv \angle bac$. Stąd wobec aksjomatu P3 (a dokładnie części mówiącej o jednoznaczności) $\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ac'}$. W szczególności $\overleftrightarrow{ac} = \overleftrightarrow{ac'}$, więc na podstawie aksjomatu I2 mamy $c = c'$, a zatem $bc \equiv b_1c_1$. Na podstawie cechy przystawania b-k-b jest $\triangle abc \equiv \triangle a_1b_1c_1$. □

Twierdzenie 3.5. *Kąty przyległe do kątów przystających są przystające.*

Dowód. Ustalmy kąty przystające AB oraz A_1B_1 o wierzchołkach odpowiednio w punktach o oraz o_1. Z aksjomatu P2 na półprostych A, B, A^*, A_1, B_1, A_1^* leżą odpowiednio punkty a, b, c, a_1, b_1, c_1 takie, że $oa \equiv o_1a_1$, $ob \equiv o_1b_1$ oraz $oc \equiv o_1c_1$. Wówczas na mocy cechy przystawania b-k-b mamy $\triangle oab \equiv \triangle o_1a_1b_1$, w szczególności $ab \equiv a_1b_1$ oraz $\angle cab = \angle oab \equiv \angle o_1a_1b_1 = \angle c_1a_1b_1$. Ponadto na mocy aksjomatu P4 mamy $ac \equiv a_1c_1$, więc na mocy cechy b-k-b dostajemy $\triangle abc \equiv \triangle a_1b_1c_1$. W szczególności

$bc \equiv b_1c_1$ oraz $\angle ocb = \angle acb \equiv \angle a_1c_1b_1 = \angle o_1c_1b_1$. Na mocy cechy b-k-b mamy $\triangle obc \equiv \triangle o_1b_1c_1$, więc $A^*B = \angle cob \equiv \angle c_1o_1b_1 = A_1^*B_1$. $\square$

Twierdzenie 3.6. *Kąty wierzchołkowe są przystające.*

Dowód. Ustalmy kąty wierzchołkowe AB oraz A^*B^*. Kąty A^*B, AB są przyległe i podobnie kąty A^*B, A^*B^* są przyległe. Ponieważ $A^*B \equiv A^*B$, więc teza wynika z twierdzenia 3.5. $\square$

Twierdzenie 3.7. *Dane są kąty przystające AB, A_1B_1 o wierzchołkach odpowiednio o, o_1 oraz półprosta C o początku o_1, przy czym zachodzi $A^*B \equiv CB_1$ oraz półproste A_1, C leżą po różnych stronach prostej $L(B_1)$. Wówczas kąty A_1B_1, CB_1 są przyległe tzn. $C = A_1^*$.*

Dowód. Ustalmy półproste A, B, A_1, B_1 oraz C takie jak w założeniach. Na mocy twierdzenia 3.5 zachodzi $A^*B \equiv A_1^*B_1$. Stąd wobec założenia $A^*B \equiv CB_1$ mamy $A_1^*B_1 \equiv CB_1$. Ponadto półproste A_1^* i C leżą po tej samej stronie prostej $L(B_1)$. Zatem na podstawie aksjomatu P3 jest $C = A_1^*$. $\square$

Twierdzenie 3.8. *Dane są półproste A, B, C o wierzchołku o i półproste A_1, B_1, C_1 o wierzchołku o_1 takie, że zachodzi $A - B - C$, natomiast A_1 i C_1 leżą po różnych stronach prostej $L(B_1)$. Jeśli ponadto $AB \equiv A_1B_1$, $BC \equiv B_1C_1$, to $A_1 - B_1 - C_1$ oraz $AC \equiv A_1C_1$.*

Dowód. Ustalmy półproste A, B, C, A_1, B_1, C_1 takie jak w założeniach. Z założenia $A - B - C$ istnieją punkty a, b, c leżące odpowiednio na półprostych A, B, C takie, że $B(abc)$. Na podstawie aksjomatu P2 istnieją punkty a_1, b_1, c_1 leżące odpowiednio na półprostych A_1, B_1, C_1 takie, że $oa \equiv o_1a_1$, $ob \equiv o_1b_1$, $oc \equiv o_1c_1$. Na mocy cechy przystawania b-k-b zachodzi $\triangle oab \equiv \triangle o_1a_1b_1$ oraz $\triangle obc \equiv \triangle o_1b_1c_1$. W szczególności $\angle oba \equiv \angle o_1b_1a_1$ oraz $\angle obc \equiv \angle o_1b_1c_1$, kąty $\angle oba$ oraz $\angle obc$ są przyległe, a półproste $\overrightarrow{b_1a_1}$, $\overrightarrow{b_1c_1}$ leżą po różnych stronach prostej $L(B_1)$. Zatem na podstawie twierdzenia 3.7 zachodzi $B(a_1b_1c_1)$ i także $A_1 - B_1 - C_1$. Ponieważ $ab \equiv a_1b_1$ oraz $bc \equiv b_1c_1$, więc na mocy aksjomatu P4 zachodzi $ac \equiv a_1c_1$. Mamy $\angle oac = \angle oab \equiv \angle o_1a_1b_1 = \angle o_1a_1c_1$, więc na mocy cechy przystawania b-k-b dostajemy $\triangle oac \equiv \triangle o_1a_1c_1$ i w szczególności $AC = \angle aoc \equiv \angle a_1o_1c_1 = A_1C_1$. $\square$

Jako wniosek z twierdzenia 3.8 otrzymujemy własność analogiczną do aksjomatu P4 dla kątów tzn. jeśli A, B, C, A_1, B_1, C_1 są półprostymi, zachodzi $A - B - C$, $A_1 - B_1 - C_1$ oraz $AB \equiv A_1B_1$, $BC \equiv B_1C_1$, to $AC \equiv A_1C_1$.

Twierdzenie 3.9. *Jeśli A, B, C, A_1, B_1, C_1 są półprostymi takimi, że zachodzi $A - B - C$, $A_1 - B_1 - C_1$ oraz $AB \equiv A_1B_1, AC \equiv A_1C_1$, to $BC \equiv B_1C_1$.*

Dowód. Ustalmy półproste A, B, C, A_1, B_1, C_1 takie jak w założeniach. Na mocy aksjomatu P3 w tej półpłaszczyźnie o brzegu $L(B)$, w której jest zawarta półprosta C, istnieje półprosta C' taka, że $B_1C_1 \equiv BC'$. Wówczas półproste A i C' leżą po różnych stronach prostej $L(B)$. Na mocy twierdzenia 3.8 zachodzi $A - B - C'$ oraz $AC' \equiv A_1C_1 \equiv AC$. Ponadto półproste C i C' leżą po tej samej stronie prostej $L(A)$. Zatem na mocy aksjomatu P3 mamy $C = C'$, a więc $BC \equiv B_1C_1$. □

Twierdzenie 3.10. *Jeśli A, C, A_1, B_1, C_1 są półprostymi takimi, że zachodzi $A_1 - B_1 - C_1$ i $AC \equiv A_1C_1$, to istnieje (dokładnie jedna) półprosta B taka, że $A - B - C$ oraz $AB \equiv A_1B_1$, $BC \equiv B_1C_1$.*

Dowód. Ustalmy półproste A, C, A_1, B_1, C_1 takie jak w założeniach. Na mocy aksjomatu P3 w półpłaszczyźnie o brzegu $L(A)$, w której leży półprosta C, istnieje półprosta B taka, że $AB \equiv A_1B_1$. Dalej w półpłaszczyźnie o brzegu $L(B)$, w której nie leży półprosta A, istnieje półprosta C' taka, że $BC' \equiv B_1C_1$. Półproste A i C' leżą po różnych stronach prostej $L(B)$, więc na podstawie twierdzenia 3.8 zachodzi $A - B - C'$ oraz $AC' \equiv A_1C_1 \equiv AC$. Ponieważ półproste C i C' leżą po tej samej stronie prostej $L(A)$, więc na mocy aksjomatu P3 zachodzi $C = C'$ i B jest szukaną półprostą. Jednoznaczność wynika z aksjomatu P3. □

Trójkąt nazywamy *równoramiennym*, gdy ma on pewne dwa boki przystające. Trójkąt, który nie jest równoramienny, nazywamy *różnobocznym.*

Twierdzenie 3.11 (Pons asinorum)**.** *W trójkącie $\triangle abc$, zachodzi $ac \equiv bc$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\angle cab \equiv cba$.*

Dowód. Ustalmy punkty niewspółliniowe a, b, c.

Jeśli $ac \equiv bc$, to (ponieważ $\angle acb = \angle bca$) mamy $\angle acb \equiv \angle bca$ i na mocy cechy przystawania b-k-b zachodzi $\triangle abc \equiv \triangle bac$, czyli w szczególności $\angle cab \equiv cba$.

Jeśli $\angle cab \equiv cba$, to (ponieważ $ab = ba$) mamy $ab \equiv ba$ i na mocy cechy przystawania k-b-k zachodzi $\triangle abc \equiv \triangle bac$, czyli w szczególności $ac \equiv bc$. $\square$

Twierdzenie 3.12. *Dla danego trójkąta $\triangle a_1b_1c_1$, danej półpłaszczyzny M i punktów a, b leżących na brzegu M takich, że $ab \equiv a_1b_1$ istnieje dokładnie jeden punkt c leżący w M taki, że $\triangle abc \equiv \triangle a_1b_1c_1$.*

Dowód. Ustalmy punkty a_1, b_1, c_1, a, b i półpłaszczyznę M takie jak w założeniach. Na mocy aksjomatu P3 w półpłaszczyźnie M istnieje półprosta C o początku a taka, że $\overrightarrow{ab}C \equiv \angle b_1a_1c_1$. Na mocy aksjomatu P2 na półprostej C istnieje punkt c taki, że $ac \equiv a_1c_1$. Wówczas $\angle b_1a_1c_1 \equiv \angle bac$ i na mocy cechy przystawania b-k-b zachodzi $\triangle abc \equiv \triangle a_1b_1c_1$.

Dla dowodu jednoznaczności załóżmy, że istnieją dwa punkty c, c' leżące w M takie, że $\triangle abc \equiv \triangle a_1b_1c_1$ oraz $\triangle abc' \equiv \triangle a_1b_1c_1$. Wówczas $\angle bac \equiv \angle b_1a_1c_1 \equiv \angle bac'$, więc na mocy aksjomatu P3 jest $\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ac'}$. Ponadto $ac \equiv a_1c_1 \equiv ac'$, zatem na mocy aksjomatu P2 jest $c = c'$. $\square$

Twierdzenie 3.13 (Cecha przystawania b-b-b)**.** *Dane są punkty niewspółliniowe a, b, c oraz punkty niewspółliniowe a_1, b_1, c_1. Jeśli $ab \equiv a_1b_1$, $ac \equiv a_1c_1$, $bc \equiv b_1c_1$, to $\triangle abc \equiv \triangle a_1b_1c_1$.*

Dowód. Ustalmy punkty a, b, c, a_1, b_1, c_1 takie jak w założeniach. Pokażemy, że $\angle acb \equiv \angle a_1c_1b_1$, co wobec cechy przystawania b-k-b zakończy dowód. Korzystając z twierdzenia 3.12 w półpłaszczyźnie o brzegu $\overleftrightarrow{ab}$, w której nie leży punkt c, istnieje punkt c' taki, że $\triangle abc' \equiv \triangle a_1b_1c_1$. Odcinek $\overline{cc'}$ ma punkt wspólny o z prostą $\overleftrightarrow{ab}$. Rozważmy następujące przypadki:

(a) $o = a$. Wówczas z twierdzenia 3.11 mamy $\angle acb = \angle c'cb \equiv \angle cc'b = \angle ac'b \equiv \angle a_1c_1b_1$.

(b) $o = b$. Wówczas dowód przebiega analogicznie jak w punkcie (a).

(c) $B(aob)$. Wówczas z twierdzenia 3.11 mamy $\angle ocb = \angle c'cb \equiv \angle cc'b = \angle oc'b$ i analogicznie $\angle oca \equiv \angle oc'a$. Ponieważ $\overrightarrow{ca} - \overrightarrow{co} - \overrightarrow{cb}$ oraz $\overrightarrow{c'a} -$

$\overrightarrow{c'o} - \overrightarrow{c'b}$, więc na podstawie twierdzenia 3.8 zachodzi $\angle acb \equiv \angle ac'b \equiv \angle a_1c_1b_1$.

(d) $B(oab)$. Wówczas z twierdzenia 3.11 mamy $\angle ocb = \angle c'cb \equiv \angle cc'b = \angle oc'b$ i analogicznie $\angle oca \equiv \angle oc'a$. Ponieważ $\overrightarrow{co} - \overrightarrow{ca} - \overrightarrow{cb}$ oraz $\overrightarrow{c'o} - \overrightarrow{c'a} - \overrightarrow{c'b}$, więc na podstawie twierdzenia 3.9 zachodzi $\angle acb \equiv \angle ac'b \equiv \angle a_1c_1b_1$.

(e) $B(abo)$. Wówczas dowód przebiega analogicznie jak w punkcie (d).

□

Twierdzenie 3.14. *Kąt AB o wierzchołku o przystaje do kąta A_1B_1 o wierzchołku o_1 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją punkty a, b, a_1, b_1 odpowiednio na półprostych A, B, A_1, B_1 takie, że $oa \equiv o_1a_1$, $ob \equiv o_1b_1$ oraz $ab \equiv a_1b_1$.*

Dowód. Załóżmy, że kąt AB o wierzchołku o przystaje do kąta A_1B_1 o wierzchołku o_1. Na mocy aksjomatu P2 istnieją punkty a, b, a_1, b_1 odpowiednio na półprostych A, B, A_1, B_1 takie, że $oa \equiv o_1a_1$ oraz $ob \equiv o_1b_1$. Na mocy cechy przystawania b-k-b zachodzi $\triangle oab \equiv \triangle o_1a_1b_1$, skąd wynika $ab \equiv a_1b_1$.

Na odwrót, załóżmy, że istnieją punkty a, b, a_1, b_1 odpowiednio na półprostych A, B, A_1, B_1 takie, że $oa \equiv o_1a_1$, $ob \equiv o_1b_1$ oraz $ab \equiv a_1b_1$. Wówczas na mocy cechy przystawania b-b-b $\triangle aob \equiv \triangle a_1o_1b_1$, skąd wynika $AB = \angle aob \equiv \angle a_1o_1b_1 = A_1B_1$. □

Uwaga. Twierdzenie 3.14 daje pewną charakteryzację pojęcia pierwotnego przystawania kątów, które odwołuje się jedynie do innych pojęć pierwotnych. Oznacza to, że można alternatywnie zbudować teorię (równoważną), gdzie charakteryzacja ta byłaby przyjęta jako definicja pojęcia przystawania kątów. Należałoby przy tym także zmodyfikować aksjomaty.

Zadania. Udowodnij.

1. Dane są punkty a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1 takie, że a, b, c są niewspółliniowe, a_1, b_1, c_1 są niewspółliniowe, $B(bad)$, $B(b_1a_1d_1)$ oraz $ab \equiv a_1b_1$, $bc \equiv b_1c_1$, $ac \equiv a_1c_1$, $ad \equiv a_1d_1$. Wówczas zachodzi $cd \equiv c_1d_1$.

2. Dane są punkty współliniowe o, a, o', a' takie, że $oa \equiv o'a'$ oraz półproste $\overrightarrow{oa}$, $\overrightarrow{o'a'}$ są zgodnie zorientowane. Wówczas $oo' \equiv aa'$ oraz półproste $\overrightarrow{oo'}$, $\overrightarrow{aa'}$ są zgodnie zorientowane.

3.1 Relacje mniejszości dla odcinków i kątów

Mówimy, że odcinek ab jest *mniejszy* od odcinka cd, co zapisujemy $ab < cd$, gdy istnieje punkt p taki, że zachodzi $B(cpd)$ oraz $ab \equiv cp$.

Twierdzenie 3.15. *Jeśli $ab \equiv cd$ i $cd < ef$, to $ab < ef$.*

Dowód. Ustalmy punkty a, b, c, d, e, f takie jak w założeniach. Wówczas istnieje punkt p taki, że $B(epf)$ oraz $cd \equiv ep$. Wtedy zachodzi $ab \equiv cd \equiv ep$, a więc $ab < ef$. □

Twierdzenie 3.16. *Jeśli $ab < cd$ i $cd \equiv ef$, to $ab < ef$.*

Dowód. Ustalmy punkty a, b, c, d, e, f takie jak w założeniach. Wówczas istnieje punkt p taki, że $B(cpd)$ oraz $ab \equiv cp$. Na podstawie twierdzenia 3.2 istnieje punkt q taki, że $B(eqf)$ oraz $eq \equiv cp$. Wtedy zachodzi $ab \equiv cp \equiv eq$, a więc $ab < ef$. □

Uwaga. Dla poprawności definicji pojęcia mniejszości odcinków należałoby przeprowadzić dowód, że definicja zależności $ab < cd$ nie zależy od wyboru kolejności punktów c i d (gdyż $cd = dc$). Dowód ten jest identyczny jak dowód twierdzenia 3.16 i dlatego go pominęliśmy.

Twierdzenie 3.17. *Jeśli $ab < cd$ i $cd < ef$, to $ab < ef$.*

Dowód. Ustalmy punkty a, b, c, d, e, f takie jak w założeniach. Wówczas istnieje punkt p taki, że zachodzi $B(epf)$ oraz $cd \equiv ep$. Na mocy twierdzenia 3.16 jest $ab < ep$, więc istnieje punkt q taki, że $B(eqp)$ oraz $ab \equiv eq$. Wtedy zachodzi $B(eqpf)$, a więc w szczególności $ab < ef$. □

Twierdzenie 3.18. *Dla dowolnych odcinków ab oraz cd zachodzi $ab < cd$ albo*[2] *$ab \equiv cd$ albo $cd < ab$.*

Dowód. Ustalmy odcinki ab oraz cd. Znajdźmy na półprostej $\overrightarrow{cd}$ punkt p taki, że $ab \equiv cp$. Jeśli $B(cpd)$, to zachodzi $ab < cd$. Jeśli $p = d$, to $ab \equiv cd$. Jeśli zaś $B(cdp)$, to $cd < cp \equiv ab$, więc na mocy twierdzenia 3.16 zachodzi $cd < ab$.

[2] W tym kontekście słowo *albo* oznacza, że zachodzi dokładnie jeden z podanych warunków.

Przypuśćmy teraz, że zachodzi $ab < ab$. Istnieje punkt p taki, że $B(apb)$ oraz $ap \equiv ab$. Z aksjomatu P2 zastosowanego do półprostej $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ap}$ dostajemy $p = b$, co jest sprzeczne z $B(apb)$.

Gdyby zachodziły jednocześnie dwa z warunków $ab < cd$, $ab \equiv cd$ oraz $cd < ab$, to wobec twierdzeń 3.15, 3.16 oraz 3.17 zachodziłoby $ab < ab$, co jak pokazaliśmy jest niemożliwe. □

Istnieje następująca prosta zależność między punktami leżącymi na jednej półprostej: Jeśli punkt a i b leżą na półprostej o początku o, to zachodzi $oa < ob$ wtedy i tylko wtedy, gdy $B(oab)$.

Mówimy, że kąt AB jest *mniejszy* od kąta CD, co zapisujemy $AB < CD$, gdy istnieje półprosta P taka, że $C - P - D$ i $AB \equiv CD$. Podobnie jak dla odcinków, aby powyższa definicja była poprawna należy pokazać, że nie zależy ona od wyboru kolejności półprostych C, D.

Poniżej prezentujemy twierdzenia dotyczące relacji mniejszości kątów analogiczne do twierdzeń 3.15, 3.16, 3.17 oraz 3.18. Dowody pozostawiamy czytelnikowi.

Twierdzenie 3.19. *Jeśli $AB \equiv CD$ i $CD < EF$, to $AB < EF$.* □

Twierdzenie 3.20. *Jeśli $AB < CD$ i $CD \equiv EF$, to $AB < EF$.* □

Twierdzenie 3.21. *Jeśli $AB < CD$ i $CD < EF$, to $AB < EF$.* □

Twierdzenie 3.22. *Dla dowolnych kątów AB oraz CD zachodzi $AB < CD$ albo $AB \equiv CD$ albo $CD < AB$.* □

Dla relacji mniejszości kątów mamy następującą zależność: Jeśli półproste A, B i P mają wspólny początek, przy czym A i B leżą po tej samej stronie prostej $L(P)$, to zachodzi $P - A - B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $PA < PB$.

Jeśli $a \neq b$, to *środkiem* odcinka ab nazywamy punkt p leżący na prostej $\overleftrightarrow{ab}$ taki, że $ap \equiv bp$.

Twierdzenie 3.23. *Jeśli p jest środkiem odcinka ab, to zachodzi $B(apb)$.*

Dowód. Ustalmy punkty a, b i p takie jak w założeniach. Wówczas $p \neq a$ oraz $p \neq b$, bo w przeciwnym wypadku wobec $ap \equiv bp$ byłoby $a = b$. Na mocy aksjomatu B4 zachodzi $B(pab)$ lub $B(apb)$ lub $B(abp)$. Gdyby $B(pab)$

lub $B(abp)$, to byłoby odpowiednio $ap < bp$ lub $bp < ap$, co jest sprzeczne z $ap \equiv bp$. Zatem $B(apb)$. $\square$

Twierdzenie 3.24. *Dowolny odcinek ma co najwyżej jeden środek.*

Dowód. Ustalmy odcinek ab i przypuśćmy, że punkty p oraz p' są różnymi środkami odcinka ab. Wobec twierdzenia 3.23 zachodzi $B(apb)$ oraz $B(ap')b$. Na podstawie twierdzenia 2.5 zachodzi $B(app'b)$ lub $B(ap'pb)$. W pierwszym przypadku mamy $ap < ap' \equiv bp' < bp \equiv ap$, co jest niemożliwe. W drugim przypadku postępujemy analogicznie. $\square$

Gdy AB jest kątem, to *dwusieczną* kąta AB nazywamy półprostą P taką, że A, B, P są zgodne oraz $AP \equiv BP$. Poniżej prezentujemy twierdzenia analogiczne do twierdzeń 3.23 oraz 3.24 dotyczące dwusiecznych. Dowody pozostawiamy czytelnikowi.

Twierdzenie 3.25. *Jeśli P jest dwusieczną kąta AB, to zachodzi $A - P - B$.* $\square$

Twierdzenie 3.26. *Dowolny kąt ma co najwyżej jedną dwusieczną.* $\square$

3.2 Środek odcinka, twierdzenie o kącie zewnętrznym, przystawanie kątów naprzemianległych

Twierdzenie 3.27. *Dowolny odcinek ma dokładnie jeden środek.*

Dowód. Ustalmy odcinek ab. Istnieje punkt p, który nie leży na prostej $\overleftrightarrow{ab}$. Wobec twierdzenia 3.12 istnieje punkt q taki, że $\triangle abp \equiv \triangle baq$, przy czym punkty p i q leżą po różnych stronach prostej $\overleftrightarrow{ab}$. Odcinek $\overline{pq}$ przecina prostą $\overleftrightarrow{ab} = \overrightarrow{ab} \cup \overrightarrow{ba}$ w pewnym punkcie o. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że $o \in \overrightarrow{ab}$. Wówczas $\angle pao = \angle pab \equiv \angle qba$ oraz $\angle qao = \angle qab \equiv \angle pba$. Wobec twierdzenia 3.8 zachodzi $\overrightarrow{bp} - \overrightarrow{ba} - \overrightarrow{bq}$, a więc odcinek $\overline{pq}$ przecina półprostą $\overrightarrow{ba}$ tzn. punkt o leży na półprostej $\overrightarrow{ba}$, a co za tym idzie na odcinku $\overline{ab}$. Na podstawie cechy przystawania b-b-b mamy $\triangle pqa \equiv \triangle qpb$. Stąd $\angle apo = \angle apq \equiv \angle bqp = \angle bqo$, a ponieważ także $\angle pao \equiv \angle qba = \angle qbo$ oraz $pa \equiv qb$, więc na podstawie cechy przystawania k-b-k dostajemy $\triangle pao \equiv \triangle qbo$. Zatem o jest środkiem odcinka ab.

Jednoznaczność wynika z twierdzenia 3.24. $\square$

Twierdzenie 3.28. *W trójkącie kąt zewnętrzny jest większy od kąta wewnętrznego do niego nieprzyległego.*

Dowód. Ustalmy trójkąt $\triangle abc$. Wykażemy, że kąt zewnętrzny $\overrightarrow{ca}^*\overrightarrow{cb}$ przy wierzchołku c jest większy od kąta $\angle abc$. Niech o będzie środkiem odcinka bc (istnieje on na mocy twierdzenia 3.27) i niech d będzie punktem na półprostej $\overrightarrow{oa}^*$ takim, że $oa \equiv od$. Kąty $\angle aob$ oraz $\angle doc$ są wierzchołkowe, więc na mocy cechy przystawania b-k-b mamy $\triangle aob \equiv \triangle doc$. Zachodzi $\overrightarrow{ca} - \overrightarrow{co} - \overrightarrow{cd}$, więc na mocy twierdzenia 2.16 jest $\overrightarrow{co} - \overrightarrow{cd} - \overrightarrow{ca}^*$. Mamy zatem $\angle abc = \angle abo \equiv \angle dco < \overrightarrow{ca}^*\overrightarrow{co} = \overrightarrow{ca}^*\overrightarrow{cb}$. $\square$

Twierdzenie 3.29. *Dane są półproste A i B o początkach odpowiednio w (różnych) punktach a i b takie, że A i B leżą po różnych stronach prostej $\overleftrightarrow{ab}$. Jeśli $\overrightarrow{ab}A \equiv \overrightarrow{ba}B$, to proste $L(A)$ i $L(B)$ są równoległe.*[3]

Dowód. Ustalmy półproste A i B o początkach odpowiednio w punktach a i b takie jak w założeniach. Przypuśćmy, że proste $L(A)$ i $L(B)$ przecinają się w punkcie c. Wówczas punkt c leży po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{ab}$, co półprosta A lub półprosta B. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że punkt c leży na półprostych A oraz B^*. Kąt $\overrightarrow{ba}B$ jest kątem zewnętrznym w trójkącie $\triangle abc$ nieprzyległym do kąta $\angle bac = \overrightarrow{ab}A$. Stąd wobec twierdzenia 3.28 zachodzi $\overrightarrow{ab}A < \overrightarrow{ba}B$, co jest sprzeczne z założeniem. $\square$

Ponieważ kąty wierzchołkowe są przystające, więc jako wniosek z twierdzenia 3.29 dostajemy, że jeśli kąty odpowiadające są przystające, to odpowiednie proste są równoległe.

Zaprezentujemy teraz alternatywne dowody trzech powyższych twierdzeń w innej kolejności. Poniższy dowód twierdzenia 3.29 nie korzysta z twierdzeń 3.27 ani 3.28.

Dowód twierdzenia 3.29. Ustalmy półproste A i B o początkach odpowiednio w punktach a i b takie jak w założeniach. Przypuśćmy, że proste $L(A)$ i $L(B)$ przecinają się w punkcie c. Wówczas punkt c leży po tej samej stronie

[3] Tezę można wypowiedzieć równoważnie: Jeśli kąty naprzemianległe wewnętrznie są przystające, to odpowiednie proste są równoległe.

prostej $\overleftrightarrow{ab}$, co półprosta A lub półprosta B. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że punkt c leży na półprostych A oraz B^*. Na półprostej B istnieje punkt c' taki, że $bc' \equiv ac$. Na mocy cechy przystawania b-k-b dostajemy $\triangle bac \equiv \triangle abc'$, skąd wynika $\angle abc \equiv \angle bac'$. Z drugiej strony kąty $\angle abc$ oraz $\angle abc'$ są przyległe, a półproste $\overrightarrow{ac}$ i $\overrightarrow{ac'}$ leżą po różnych stronach prostej $\overleftrightarrow{ab}$. Na mocy twierdzenia 3.7 kąty $\angle bac$ i $\angle bac'$ są przyległe tzn. punkty c, a, c' są współliniowe. Wtedy punkty a i b leżą na prostych $\overleftrightarrow{ab}$ oraz $\overleftrightarrow{cc'}$, a więc $a = b$, co przeczy założeniu. □

Poniższy alternatywny dowód twierdzenia 3.28 nie korzysta z twierdzenia 3.27, ale z twierdzenia 3.29.

Dowód twierdzenia 3.28. Ustalmy trójkąt $\triangle abc$. Wykażemy, że kąt zewnętrzny $\overrightarrow{ca}^*\overrightarrow{cb}$ przy wierzchołku c jest większy od kąta $\angle abc$. Przypuśćmy nie wprost, że $\overrightarrow{ca}^*\overrightarrow{cb} < \angle abc$ lub $\overrightarrow{ca}^*\overrightarrow{cb} \equiv \angle abc$. Istnieje półprosta P o początku w punkcie b taka, że $\overrightarrow{ca}^*\overrightarrow{cb} \equiv \overrightarrow{bc}P$, przy czym $\overrightarrow{ba} - P - \overrightarrow{bc}$ lub $P = \overrightarrow{ba}$. Półprosta P przecina odcinek $\overline{ca}$ lub przechodzi przez punkt a. Z drugiej strony wobec twierdzenia 3.29 proste $L(P)$ oraz $L(\overrightarrow{ca}^*) = \overleftrightarrow{ac}$ są równoległe. Otrzymaliśmy sprzeczność. □

Poniższy alternatywny dowód twierdzenia 3.27 korzysta twierdzenia 3.29.

Dowód twierdzenia 3.27. Ustalmy odcinek ab. Istnieje punkt p, który nie leży na prostej $\overleftrightarrow{ab}$. Wobec twierdzenia 3.12 istnieje punkt q taki, że $\triangle abp \equiv \triangle baq$, przy czym punkty p i q leżą po różnych stronach prostej $\overleftrightarrow{ab}$. Mamy $\angle abp \equiv \angle baq$ oraz $\angle bap \equiv \angle abq$, więc z twierdzenia 3.29 wynika, że proste $\overleftrightarrow{ap}$ i $\overleftrightarrow{bq}$ są równoległe oraz proste $\overleftrightarrow{bp}$ i $\overleftrightarrow{aq}$ są równoległe. W szczególności $\square apbq$ jest czworokątem wypukłym i jego przekątne się przecinają tzn. istnieje punkt o taki, że $B(aob)$ oraz $B(poq)$. Dalej dowód przebiega identycznie jak wcześniej. □

Jako wniosek z twierdzenia 3.29 otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.30. *Dla dowolnej prostej L i punktu p istnieje (co najmniej jedna) prosta równoległa do L i przechodząca przez p.*

Dowód. Ustalmy prostą L i punkt p, przy czym możemy założyć, że p nie leży na L. Weźmy dowolną półprostą A o początku w punkcie a zawartą w prostej

L. Z aksjomatu P3 istnieje półprosta P o początku w punkcie p taka, że $A\overrightarrow{ap} \equiv P\overrightarrow{pa}$, przy czym półproste P i A leżą po różnych stronach prostej $\overleftrightarrow{ap}$. Na mocy twierdzenia 3.29 proste $L = L(A)$ oraz $L(P)$ są równoległe. $\square$

Środkową trójkąta $\triangle abc$ opuszczoną z wierzchołka a na bok bc nazywamy odcinek as, gdzie s jest środkiem boku bc.

Zadania. Udowodnij.

1. Każdy kąt ma dokładnie jedną dwusieczną.
2. Dane są punkty współliniowe o, a, o', a'. Wówczas środek odcinka oa' pokrywa się ze środkiem odcinka $o'a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $oa \equiv o'a'$ oraz półproste $\overrightarrow{oa}$, $\overrightarrow{o'a'}$ są zgodnie zorientowane.
3. W trójkącie równoramiennym środkowe opuszczone na przystające boki są przystające.
4. W trójkącie równoramiennym dwusieczne[4] opuszczone na przystające boki są przystające.
5. Trójkąt jest równoramienny wtedy i tylko wtedy, gdy środkowa pokrywa się z dwusieczną.

3.3 Zależności w trójkątach

Twierdzenie 3.31. *W trójkącie $\triangle abc$ zachodzi $\angle bac < \angle abc$ wtedy i tylko wtedy, gdy $bc < ac$.*

Dowód. Ustalmy punkty niewspółliniowe a, b, c.

Załóżmy najpierw, że zachodzi $bc < ac$. Z definicji relacji mniejszości odcinków istnieje punkt p taki, że $B(cpa)$ oraz $bc \equiv cp$. Wówczas trójkąt $\triangle cbp$ jest równoramienny, więc $\angle cbp \equiv cpb$. Ponadto z $B(cpa)$ wynika, że $\angle abc > \angle pbc$, a z twierdzenia o kącie zewnętrznym w trójkącie $\triangle apb$ mamy $\angle bac < \angle cpb$. Zatem $\angle bac < \angle cpb \equiv \angle cbp < \angle abc$.

[4]Mówiąc dokładniej, mamy na myśli odcinki zawarte w dwusiecznych kątów wewnętrznych.

Załóżmy teraz, że zachodzi $\angle bac < \angle abc$. Na mocy twierdzenia 3.18 jest $bc < ac$ albo $bc \equiv ac$ albo $bc > ac$. Gdyby było $bc \equiv ac$, to mielibyśmy $\angle bac \equiv \angle abc$, co jest sprzeczne z założeniem. Gdyby zaś $bc > ac$, to na mocy udowodnionej części byłoby $\angle bac > \angle abc$, co również jest sprzeczne z założeniem. Zatem $bc < ac$. □

Twierdzenie 3.32 (Cecha przystawania b-k-k)**.** *Dane są punkty niewspółliniowe a, b, c oraz punkty niewspółliniowe a_1, b_1, c_1. Jeśli $ab \equiv a_1b_1$, $\angle abc \equiv \angle a_1b_1c_1$, $\angle acb \equiv \angle a_1c_1b_1$, to $\triangle abc \equiv \triangle a_1b_1c_1$.*

Dowód. Ustalmy punkty a, b, c, a_1, b_1, c_1 takie jak w założeniach. Istnieje na półprostej $\overrightarrow{bc}$ punkt c' taki, że $bc' \equiv b_1c_1$. Na mocy cechy przystawania b-k-b zachodzi $\triangle abc' \equiv \triangle a_1b_1c_1$. Zatem $\angle ac'b \equiv \angle a_1c_1b_1 \equiv \angle acb$. Ponieważ $c' \in \overrightarrow{bc}$, więc zachodzi $B(bcc')$ albo $c = c'$ albo $B(bc'c)$. Przypuśćmy nie wprost, że zachodzi $B(bcc')$. Wówczas kąt $\angle acb$ jest kątem zewnętrznym trójkąta $\triangle acc'$ nieprzyległym do kąta $\angle ac'c$, więc z twierdzenia o kącie zewnętrznym mamy $\angle acb > \angle ac'c = \angle ac'b \equiv \angle acb$, co jest niemożliwe. Przypuszczenie $B(bc'c)$ prowadzi do sprzeczności w sposób analogiczny. Zatem mamy $c = c'$ oraz $\triangle abc \equiv \triangle a_1b_1c_1$. □

Uwaga. Mogłoby się wydawać, że powyższą cechę przystawania b-k-k daje się łatwo udowodnić przez stwierdzenie, że trzeci kąt trójkąta jest wyznaczony jednoznacznie przez dwa pozostałe, a następnie skorzystanie z cechy k-b-k. Takie rozumowanie korzysta jednak z twierdzenia geometrii euklidesowej o sumie kątów w trójkącie, a to twierdzenie nie wynika z dotychczas wprowadzonych przez nas aksjomatów[5]. Z tych powodów cecha przystawania b-k-k zasługuje na osobne traktowanie.

Twierdzenie 3.33. *Dane są trójkąty $\triangle abc$ i $\triangle a_1b_1c_1$ takie, że $ab \equiv a_1b_1$ oraz $bc \equiv b_1c_1$. Wówczas zachodzi $\angle abc > \angle a_1b_1c_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $ac > a_1c_1$.*

Dowód. Ustalmy punkty a, b, c, a_1, b_1, c_1 takie jak w założeniach.

Załóżmy najpierw, że $\angle abc > \angle a_1b_1c_1$. Z definicji relacji mniejszości kątów istnieje półprosta A o początku w punkcie b taka, że zachodzi $\overrightarrow{ba}$ –

[5]Nie zajmujemy się tutaj problemami niezależności aksjomatów, a ten fakt podajemy tylko informacyjnie.

$A - \overrightarrow{bc}$ oraz $A\overrightarrow{bc} \equiv \angle a_1b_1c_1$. Na półprostej A weźmy punkt a' taki, że $ba' \equiv b_1a_1$. Na mocy cechy przystawania b-k-b mamy $\triangle a_1b_1c_1 \equiv \triangle a'bc$. Półprosta $A = \overrightarrow{ba'}$ przecina odcinek $\overline{ac}$ w pewnym punkcie d. Rozważmy następujące przypadki:

(a) $B(ba'd)$. Wówczas punkt a' leży wewnątrz trójkąta $\triangle abc$ i na podstawie twierdzenia 2.19 istnieje punkt e taki, że $B(aeb)$ oraz $B(ca'e)$. Wtedy

$$\angle a'ac < \angle aa'e < \angle aa'b \equiv \angle a'ab = \angle a'ae < \angle aa'c.$$

Na podstawie twierdzenia 3.31 mamy $ac > a'c \equiv a_1c_1$.

(b) $a' = d$. Wówczas

$$ac > dc = a'c \equiv a_1c_1.$$

(c) $B(bda')$. Wówczas $\square abca'$ jest czworokątem wypukłym oraz

$$\angle a'ac < \angle a'ab \equiv \angle aa'b < \angle aa'c.$$

Na podstawie twierdzenia 3.31 mamy $ac > a'c \equiv a_1c_1$.

Załóżmy teraz, że $ac > a_1c_1$. Gdyby $\angle abc < \angle a_1b_1c_1$, to korzystając z udowodnionej części mielibyśmy $ac < a_1c_1$, co przeczy założeniu. Gdyby zaś $\angle abc \equiv \angle a_1b_1c_1$, to na mocy cechy przystawania b-k-b byłoby $ac \equiv a_1c_1$, co również przeczy założeniu. Zatem $\angle abc > \angle a_1b_1c_1$. □

Twierdzenie 3.34. *Dany jest trójkąt $\triangle abc$ oraz oraz punkt c' taki, że $B(abc')$ oraz $bc \equiv bc'$. Wówczas zachodzi $ac' > ac$.*

Dowód. Ustalmy punkty a, b, c oraz c' takie jak w założeniach. Wówczas zachodzi

$$\angle ac'c = \angle bc'c \equiv \angle bcc' < \angle acc',$$

więc korzystając z twierdzenia 3.31 otrzymujemy $ac' > ac$. □

Twierdzenie 3.34 jest w istocie sformułowaniem nierówności trójkąta bez pojęcia dodawania odcinków.

Zadania. Udowodnij.

1. Jeśli $B(a_1b_1c_1)$ oraz $ab \equiv a_1b_1$, $bc \equiv b_1c_1$, $ac \equiv a_1c_1$, to $B(abc)$.

3.4 Kąty proste

Kąt AB nazywamy kątem *prostym*, jeśli jest przystający do swojego kąta przyległego.[6]

Twierdzenie 3.35. *Kąt przystający do kąta prostego jest prosty.*

Dowód. Ustalmy kąt prosty AB oraz kąt CD do niego przystający. Wówczas na mocy twierdzenia 3.5 zachodzi $A^*B \equiv C^*D$. Zatem $CD \equiv AB \equiv A^*B \equiv C^*D$. □

Proste K i L nazywamy *prostopadłymi* jeśli przecinają się w (dokładnie jednym) punkcie o oraz kąty AB, A^*B, AB^*, A^*B^* są proste, gdzie A i B są półprostymi, na które punkt o dzieli odpowiednio K i L. Z twierdzenia 3.35 wynika, że warunkiem wystarczającym na prostopadłość prostych jest aby tylko jeden z tych kątów był prosty.

Twierdzenie 3.36. *Dla dowolnej prostej L i dowolnego punktu p nie leżącego na L istnieje prosta prostopadła do L przechodząca przez p.*[7]

Dowód. Ustalmy prostą L oraz punkt p nie leżący na L. Weźmy półprostą A zawartą w prostej L o początku w pewnym punkcie a. W półpłaszczyźnie, w której nie leży punkt p, na mocy aksjomatu P3 istnieje półprosta B taka, że $AB \equiv A\overrightarrow{ap}$. Na podstawie aksjomatu P2 ma półprostej B istnieje punkt q taki, że $ap \equiv aq$. Odcinek $\overline{pq}$ ma punkt wspólny r z prostą L. Rozważmy przypadki:

(a) $r = a$. Wówczas zachodzi $\overrightarrow{ap} = B^*$ i wtedy $AB \equiv AB^*$ tzn. kąt AB jest prosty.

(b) Punkt r leży na półprostej A. Na mocy cechy przystawania b-k-b zachodzi $\triangle par \equiv \triangle qar$, a zatem $\angle arp \equiv \angle arq$ i kąty te są przyległe. Stąd kąt $\angle arp$ jest prosty.

(c) Punkt r leży na półprostej A^*. Na mocy twierdzenia 3.5 zachodzi $\angle par \equiv qar$ i analogicznie jak w punkcie (b) stwierdzamy, że kąt $\angle arp$ jest prosty.

[6] Oba kąty przyległe do kąta AB są przystające, więc definicja ta jest poprawna.

[7] Prosta ta jest wyznaczona jednoznacznie, jednak dowód tego faktu odkładamy.

□

Jako wniosek z twierdzenia 3.36 otrzymujemy, że istnieją kąty proste.

Twierdzenie 3.37. *Dla dowolnej półprostej A o początku w punkcie o zawartej w prostej L i półpłaszczyzny M o brzegu L, istnieje dokładnie jedna półprosta B zawarta w M o początku o taka, że kąt AB jest prosty (oraz dokładnie jedna prosta prostopadła do L przechodząca przez o).*

Dowód. Ustalmy prostą L, półprostą A, punkt o oraz półpłaszczyznę M takie jak w założeniach. Ponieważ istnieje kąt prosty, więc na mocy aksjomatu P3 w półpłaszczyźnie M istnieje półprosta B taka, że kąt AB jest przystający do tego kąta prostego. Na podstawie twierdzenia 3.35 kąt AB jest prosty (a więc proste L i $L(B)$ są prostopadłe).

Przypuśćmy teraz, że w półpłaszczyźnie M jest zawarta (inna) półprosta B' taka, że kąt AB' jest prosty. Ponieważ półproste B i B' leżą po tej samej stronie prostej L, więc na mocy twierdzenia 2.17 zachodzi $A - B - B'$ albo $A - B' - B$. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że $A - B - B'$. Na podstawie twierdzenia 2.16 zachodzi $B - B' - A^*$. Zatem mamy $AB < AB' \equiv B'A^* < BA^* = AB$, co jest niemożliwe. □

Twierdzenie 3.38. *Dowolne dwa kąty proste są przystające.*

Dowód. Załóżmy, że kąty AB i CD są proste. Korzystając z aksjomatu P3, odłóżmy w półpłaszczyźnie o brzegu $L(A)$, w której zawiera się półprosta B, półprostą B' taką, że $AB' \equiv CD$. Na mocy twierdzenia 3.35 kąt AB' jest prosty i na mocy twierdzenia 3.37 zachodzi $B = B'$. Zatem $AB \equiv CD$. □

Kąt nazywamy *ostrym*, jeśli jest mniejszy od kąta prostego. Kąt nazywamy *rozwartym*, gdy jest większy od kąta prostego. Definicje te nie zależą od wyboru kąta prostego, gdyż wszystkie kąty proste są przystające. Kąt mniejszy od kąta ostrego jest ostry, kąt większy od kąta rozwartego jest rozwarty, natomiast każdy kąt ostry jest mniejszy od każdego kąta rozwartego. Ponadto każdy kąt jest ostry, prosty lub rozwarty.

Twierdzenie 3.39. *Kąt przyległy do kąta ostrego jest rozwarty, a kąt przyległy do kąta rozwartego jest ostry.*

Dowód. Ustalmy kąt ostry AB. W półpłaszczyźnie o brzegu $L(A)$, w której leży półprosta B, znajdźmy półprostą C taką, że kąt AC jest prosty. Wówczas zachodzi $AB < AC$ oraz $A{-}B{-}C$. Z twierdzenia 2.16 mamy $B{-}C{-}A^*$, a więc kąt A^*B jest większy od kąta prostego A^*C, czyli rozwarty. Dowód drugiej własności jest podobny. □

Twierdzenie 3.40. *W trójkącie co najmniej dwa kąty wewnętrzne są ostre.*

Dowód. Ustalmy punkty niewspółliniowe a, b, c i załóżmy, że kąt $\angle cab$ jest prosty lub rozwarty. Na mocy twierdzenia 3.28 kąty zewnętrzne do niego nieprzyległe są od niego większe, a zatem są rozwarte. Kąty $\angle abc$ oraz $\angle acb$ są przyległe do tych kątów, a więc na mocy twierdzenia 3.39 są ostre. □

Twierdzenie 3.41. *Dla dowolnej prostej L i punktu p nie leżącego na L istnieje dokładnie jedna prosta prostopadła do L przechodząca przez p.*

Dowód. Ustalmy prostą L oraz punkt p nie leżący na L. Z twierdzenia 3.36 wynika istnienie prostej prostopadłej. Dla dowodu jednoznaczności przypuśćmy, że istnieją różne proste K oraz K' przechodzące przez p i prostopadłe do L. Proste K oraz K' przecinają L odpowiednio w (różnych) punktach a oraz a'. W trójkącie $\triangle paa'$ są dwa kąty proste $\angle paa'$ oraz $\angle pa'a$, co jest sprzeczne z twierdzeniem 3.40. □

Twierdzenie 3.42 (Cecha przystawania b-b-k)**.** *Dane są punkty niewspółliniowe a, b, c oraz punkty niewspółliniowe a_1, b_1, c_1. Jeśli $ab \equiv a_1b_1, ac \equiv a_1c_1, \angle abc \equiv \angle a_1b_1c_1$, przy czym kąt $\angle abc$ jest prosty lub rozwarty, to $\triangle abc \equiv \triangle a_1b_1c_1$.*

Dowód. Ustalmy punkty a, b, c, a_1, b_1, c_1 takie jak w założeniach. Na mocy aksjomatu P2 na półprostej $\overrightarrow{bc}$ istnieje punkt c' taki, że $bc' \equiv b_1c_1$. Na podstawie cechy przystawania b-k-b zachodzi $\triangle abc' \equiv \triangle a_1b_1c_1$. Mamy $ac \equiv a_1c_1 \equiv ac'$ oraz $B(bcc')$ albo $c = c'$ albo $B(bc'c)$. Przypuśćmy, że zachodzi $B(bcc')$. Trójkąt $\triangle acc'$ jest równoramienny, zatem $\angle acc' \equiv \angle ac'c$ i oba te kąty są ostre (bo w trójkącie co najmniej dwa kąty są ostre). Z twierdzenia o kącie zewnętrznym dla trójkąta $\triangle abc$ dostajemy $\angle abc < \angle acc'$. Zatem kąt $\angle abc$ jest ostry, co jest sprzeczne z założeniem. Podobnie do sprzeczności prowadzi przypuszczenie $B(bc'c)$. Zatem $c = c'$ i $\triangle abc \equiv \triangle a_1b_1c_1$. □

Twierdzenie 3.43. *Dane są trójkąty prostokątne* $\triangle abc$ *oraz* $\triangle a_1b_1c_1$ *o kątach prostych odpowiednio* $\angle acb$ *oraz* $\angle a_1b_1c_1$. *Jeśli zachodzi jeden z warunków*

(1) $bc \equiv b_1c_1$ *oraz* $ac \equiv a_1c_1$,

(2) $\angle abc \equiv \angle a_1b_1c_1$ *oraz* $bc \equiv b_1c_1$,

(3) $\angle abc \equiv \angle a_1b_1c_1$ *oraz* $ac \equiv a_1c_1$,

(4) $bc \equiv b_1c_1$ *oraz* $ab \equiv a_1b_1$,

to $\triangle abc \equiv \triangle a_1b_1c_1$.

Dowód. Twierdzenie wynika z faktu, że dowolne dwa kąty proste są przystające oraz kolejno z cech przystawania b-k-b, k-b-k, b-k-k, k-b-b. □

W trójkącie prostokątnym bok leżący naprzeciwko kąta prostego nazywamy *przeciwprostokątną*, a każdy z pozostałych dwóch boków *przyprostokątną*. Z twierdzeń 3.28 oraz 3.31 wynika, że w trójkącie prostokątnym przyprostokątna jest mniejsza od przeciwprostokątnej.

Rzutem prostopadłym punktu p na prostą L nazywamy punkt wspólny L i prostej prostopadłej do L przechodzącej przez p. Definicja ta jest poprawna, gdyż dla dowolnej prostej L i dowolnego punktu p istnieje dokładnie jedna prosta prostopadła do L przechodząca przez p. Gdy punkt a jest rzutem prostopadłym punktu p na prostą L, to $pa < pa'$ dla każdego punktu a' leżącego na L różnego od a.

Wysokością trójkąta $\triangle abc$ opuszczoną z wierzchołka a na bok bc nazywamy odcinek ap, gdzie p jest rzutem prostopadłym punktu a na prostą $\overleftrightarrow{bc}$. Punkt p nazywamy wtedy *spodkiem* wysokości.

Symetralną odcinka ab nazywamy prostą prostopadłą do prostej $\overleftrightarrow{ab}$ przechodzącą przez środek odcinka ab. Każdy odcinek ma dokładnie jedną symetralną.

Zadania. Udowodnij.

1. Dany jest kąt ostry AB. Dla dowolnego punktu a na półprostej A rzut prostopadły punktu a na prostą $L(B)$ leży na półprostej B.

2. Dany jest odcinek ab. Dla dowolnego punktu p, p leży na do symetralnej odcinka ab wtedy i tylko wtedy, gdy $ap \equiv bp$.

3. Podzbiór płaszczyzny jest prostą wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbiorem wszystkich punktów jednakowo odległych od pewnych dwóch ustalonych punktów.

4. Dane są dwa różne punkty a i b, a prosta L jest symetralną odcinka ab. Dla dowolnego punktu p, p leży po tej samej stronie prostej L co punkt a wtedy i tylko wtedy, gdy $ap < bp$.

5. Dane są punkty a, b, c leżące na prostej K takie, że zachodzi $B(abc)$, oraz prosta L, która nie jest prostopadła do K. Wówczas rzuty prostopadłe a^*, b^*, c^* odpowiednio punktów a, b, c na prostą L spełniają zależność $B(a^*b^*c^*)$.

6. Odcinek o końcach we wnętrzu trójkąta jest mniejszy od najdłuższego boku tego trójkąta.

7. Trójkąt jest równoramienny wtedy i tylko wtedy, gdy środkowa pokrywa się z wysokością.

8. Trójkąt jest równoramienny wtedy i tylko wtedy, gdy dwusieczna pokrywa się z wysokością.

9. W trójkącie równoramiennym wysokości opuszczone na przystające boki są przystające.

10. W trójkącie równoramiennym odcinki będące częścią wspólną trójkąta i symetralnych przystających boków, są przystające.

11. Dany jest kąt AB, punkt p oraz punkty p_A, p_B, które są rzutami prostopadłymi punktu p odpowiednio na proste $L(A)$, $L(B)$. Wówczas punkt p leży na dwusiecznej kąta AB wtedy i tylko wtedy, gdy p leży we wnętrzu kąta AB oraz $pp_A \equiv pp_B$.

3.5 Odcinki swobodne i kąty swobodne

Dotychczas wprowadzone pojęcia nie wystarczają do określenia, czym jest suma dwóch odcinków, iloczyn odcinka przez liczbę bądź długość odcinka jako liczba. Mimo, że nasza teoria ma charakter syntetyczny, możliwe jest poprawne zdefiniowanie tych pojęć. Ograniczymy się tutaj do najważniejszych definicji i twierdzeń (zazwyczaj bez dowodów). W rozdziale 4 będziemy kontynuować te rozważania pod dodatkowym założeniem aksjomatu ciągłości, który jest konieczny dla wielu własności.

Uwaga. Za znane uznajemy zbiory liczbowe takie jak $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ itd. Zbiory te istnieją niejako równolegle z naszą teorią. Tym samym nie zajmujemy się budowaniem arytmetyki liczbowej na bazie aksjomatów geometrii.[8]

Jak wynika z aksjomatu P1 relacja $\equiv_O$ w zbiorze odcinków jest relacją równoważności. Klasy abstrakcji względem tej relacji nazywamy *odcinkami swobodnymi*. Podobnie, relacja $\equiv_K$ przystawania kątów jest relacją równoważności. Jej klasy abstrakcji nazywać będziemy *kątami swobodnymi*.[9]

Mówimy, że odcinek swobodny $[ab]$ jest *mniejszy* od odcinka swobodnego $[cd]$, co zapisujemy $[ab] < [cd]$, gdy $ab < cd$. Z twierdzeń 3.15 oraz 3.16 wynika, że definicja ta nie zależy od wyboru reprezentantów. Z twierdzeń 3.17 oraz 3.18 wynika zaś w prosty sposób następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.44. *Relacja mniejszości w zbiorze odcinków swobodnych jest relacją liniowego porządku.* □

Mówimy, że odcinek swobodny $\mathfrak{c}$ jest *sumą* odcinków $\mathfrak{a}$ oraz $\mathfrak{b}$, gdy istnieją punkty p, q, r takie, że $B(pqr)$ oraz $\mathfrak{a} = [pq]$, $\mathfrak{b} = [qr]$, $\mathfrak{c} = [pr]$.

Twierdzenie 3.45. *Dla dowolnych odcinków swobodnych $\mathfrak{a}$ oraz $\mathfrak{b}$ istnieje dokładnie jeden odcinek $\mathfrak{c}$, który jest ich sumą.*

Sumę odcinków $\mathfrak{a}$ oraz $\mathfrak{b}$ oznaczamy $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.

Twierdzenie 3.46. *Dla dowolnych odcinków swobodnych $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ zachodzą następujące własności.*

(1) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$.

(2) $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$.

(3) $\mathfrak{a} < \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.

[8] Podobnie jest z teorią mnogości, którą posługujemy się swobodnie.

[9] Czasem dla odróżnienia normalne odcinki i kąty nazywamy odpowiednio odcinkami i kątami *związanymi*.

(4) Jeśli $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$*, to* $\mathfrak{a} + \mathfrak{c} < \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$*.*

(5) Jeśli $\mathfrak{a} + \mathfrak{c} < \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$*, to* $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$*.*

(6) $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odcinek* $\mathfrak{d}$ *taki, że* $\mathfrak{a} + \mathfrak{d} = \mathfrak{b}$*.*

Rekurencyjnie określamy mnożenie odcinka swobodnego przez liczbę naturalną:

(A) $1\mathfrak{a} := \mathfrak{a}$,

(B) $(n+1)\mathfrak{a} := n\mathfrak{a} + \mathfrak{a}$.

Ponieważ każdy odcinek ma dokładnie jeden środek, więc dla każdego odcinka swobodnego $\mathfrak{a}$ istnieje dokładnie jeden odcinek $\mathfrak{b}$ taki, że $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{b}$. Z pomocą tej własności przez indukcję dowodzimy, że dla każdego odcinka $\mathfrak{a}$ oraz liczby $k \in \mathbb{N}$ istnieje dokładnie jeden odcinek $\mathfrak{b}$ taki, że $2^k\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$. Ten (jedyny) odcinek będziemy oznaczać $\frac{1}{2^k}\mathfrak{a}$.

Uwaga. Mogłoby się wydawać, że mianownik postaci 2^k daje się zastąpić przez dowolną liczbę naturalną. Byłoby to możliwe wtedy, gdy dla każdego odcinka ab i liczby naturalnej $m \in \mathbb{N}$ istniałby podział odcinka ab na m równych części. Znana konstrukcja (cyklem i linijką) takiego podziału zakłada jednak aksjomat Euklidesa. Z drugiej strony liczby dwójkowe są wystarczające dla naszych potrzeb — są one gęste w zbiorze liczb rzeczywistych.

Możemy teraz przyjąć definicję mnożenia odcinka swobodnego przez liczbę dwójkową (dodatnią) $\omega = \frac{n}{2^k}$ w następujący sposób:

$$\omega\mathfrak{a} := n\left(\frac{1}{2^k}\mathfrak{a}\right),$$

przy czym można pokazać, że definicja nie zależy od wyboru reprezentacji liczby dwójkowej ω.

Większość własności odcinków swobodnych przenosi się bez zmian na kąty swobodne. Kąty swobodne $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ nazywamy *przyległymi*, gdy istnieją kąty przyległe PQ, P^*Q takie, że $\mathfrak{A} = [PQ]$ oraz $\mathfrak{B} = [P^*Q]$. Dla każdego kąta swobodnego $\mathfrak{A}$ istnieje dokładnie jeden kąt swobodny $\mathfrak{B}$ taki, że $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ są przyległe. Ten (jedyny) kąt swobodny oznaczamy symbolem $\mathfrak{A}^*$. Zachodzi $(\mathfrak{A}^*)^* = \mathfrak{A}$. Istnieje kąt swobodny złożony dokładnie z wszystkich kątów prostych. Nazywamy go *kątem swobodnym prostym* i oznaczamy $\mathfrak{R}$.

Mówimy, że kąt swobodny $[AB]$ jest *mniejszy* od kąta swobodnego $[CD]$, co zapisujemy $[AB] < [CD]$, gdy $AB < CD$. Na podstawie twierdzeń 3.19 oraz 3.20 definicja ta nie zależy od wyboru reprezentantów. Kąt swobodny mniejszy od prostego nazywamy *kątem swobodnym ostrym*, zaś większy od prostego nazywamy *kątem swobodnym rozwartym*.

Twierdzenie 3.47. *Relacja mniejszości w zbiorze kątów swobodnych jest relacją liniowego porządku.* $\square$

Mówimy, że kąt swobodny $\mathfrak{C}$ jest *sumą* kątów swobodnych $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$, gdy istnieją półproste P, Q, R takie, że $P{-}Q{-}R$ oraz $\mathfrak{A} = [PQ]$, $\mathfrak{B} = [QR]$, $\mathfrak{C} = [PR]$. W przeciwieństwie do sumy odcinków swobodnych, suma kątów nie zawsze istnieje. Jeśli jednak tak jest, to jest ona wyznaczona jednoznacznie. Wtedy sumę kątów $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ oznaczamy $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$.

Twierdzenie 3.48. *Suma kątów swobodnych $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B} < \mathfrak{A}^*$.*

Twierdzenie 3.49. *Dla dowolnych kątów swobodnych $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ zachodzą następujące własności.*

(1) *Jeśli istnieje $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$, to istnieje $\mathfrak{B}+\mathfrak{A}$ i zachodzi równość $\mathfrak{A}+\mathfrak{B} = \mathfrak{B}+\mathfrak{A}$.*

(2) *Jeśli istnieje $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C}$, to istnieje $\mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})$ i zachodzi równość $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})$. Odwrotnie, jeśli istnieje $\mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})$, to istnieje $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C}$ i zachodzi równość $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})$.*

(3) *Jeśli istnieje suma $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A} < \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$.*

(4) *Jeśli $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ i istnieje suma $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$, to istnieje suma $\mathfrak{A} + \mathfrak{C}$ oraz $\mathfrak{A} + \mathfrak{C} < \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$.*

(5) *Jeśli istnieją sumy $\mathfrak{A} + \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ oraz $\mathfrak{A} + \mathfrak{C} < \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$, to $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$.*

(6) *$\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje kąt $\mathfrak{D}$ taki, że $\mathfrak{A} + \mathfrak{D} = \mathfrak{B}$.*

Definiujemy indukcyjnie mnożenie kąta swobodnego $\mathfrak{A}$ przez liczbę naturalną n:

(A) $1\mathfrak{A} := \mathfrak{A}$,

(B) jeśli istnieją kąty $n\mathfrak{A}$ oraz $n\mathfrak{A} + \mathfrak{A}$, to $(n+1)\mathfrak{A} := n\mathfrak{A} + \mathfrak{A}$.[10]

Ponieważ dowolny kąt ma dokładnie jedną dwusieczną, więc dla dowolnego kąta $\mathfrak{A}$ istnieje dokładnie jeden kąt $\mathfrak{B}$ taki, że $\mathfrak{B} + \mathfrak{B} = \mathfrak{A}$. Z pomocą tej własności przez indukcję dowodzimy, że dowolnego kąta $\mathfrak{A}$ i liczby $k \in \mathbb{N}$ istnieje dokładnie jeden kąt $\mathfrak{B}$ taki, że $2^k\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$. Ten jedyny kąt oznaczamy $\frac{1}{2^k}\mathfrak{A}$. Podobnie jak w przypadku odcinków, iloczynem kąta swobodnego $\mathfrak{A}$ i liczby dwójkowej dodatniej $\omega = \frac{n}{2^k}$ nazywamy kąt $\omega\mathfrak{A} := n\left(\frac{1}{2^k}\mathfrak{A}\right)$ pod warunkiem, że ten iloczyn istnieje. Kwestia istnienia tego kąta, jak również jego postać nie zależą od wyboru reprezentacji liczby dwójkowej ω.

Twierdzenie 3.50 (Nierówność trójkąta)**.** *$[ab] + [bc] \geqslant [ac]$, przy czym $[ab] + [bc] = [ac]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $B(abc)$.*

Dowód. Ustalmy punkty a, b, c. Jeśli punkty a, b, c są niewspółliniowe, to z twierdzenia 3.34 mamy $[ab]+[bc] > [ac]$. Jeśli $B(bac)$, to $[ab]+[bc] > [bc] > [ac]$, a jeśli $B(acb)$, to $[ab] + [bc] > [ab] > [ac]$. □

Zadania. Udowodnij.

1. Gdy punkt p leży wewnątrz trójkąta $\triangle abc$, to $\angle apb > \angle acb$.
2. Gdy punkt p leży wewnątrz trójkąta $\triangle abc$, to $[ap] + [bp] < [ac] + [bc]$.

[10] Formalnie symbol $n\mathfrak{A}$ może od pewnego n oznaczać cokolwiek, na przykład zbiory puste.

Rozdział 4

Geometria neutralna

W tym rozdziale zakładamy wszystkie aksjomaty incydencji (poza pewnikiem Euklidesa), uporządkowania, przystawania oraz aksjomat ciągłości C1. Ta teoria nosi nazwę *geometrii neutralnej.*

4.1 Pewnik Archimedesa

Rozważmy następującą własność:

> (Pewnik Archimedesa). Dla dowolnego punktu a na półprostej A o początku o oraz odcinka pq istnieje liczba $n \in \mathbb{N}$ taka, że $ox_n > oa$, gdzie ciąg (x_n) jest zdefiniowany rekurencyjnie: x_1 jest punktem półprostej A takim, że $ox_1 \equiv pq$ oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $B(ox_n x_{n+1})$ i $x_n x_{n+1} \equiv pq$.

Intuicyjny sens jest jasny: Dowolny odcinek jest mniejszy od pewnej wielokrotności każdego innego odcinka. Zdanie to nazywane jest pewnikiem częściowo ze względów historycznych, gdyż przez długi czas stanowiło ono uzupełnienie układu aksjomatów Euklidesa. Pewnik Archimedesa daje się jednak udowodnić przy użyciu aksjomatu ciągłości. Sformułujemy go jako twierdzenie w języku odcinków swobodnych.

Twierdzenie 4.1. *Dla dowolnych odcinków swobodnych* $\mathfrak{a}$*,* $\mathfrak{b}$ *istnieje liczba* $n \in \mathbb{N}$ *taka, że* $n\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$*.*

Dowód. Weźmy pewną półprostą A o początku o. Definiujemy

$$X := \left\{ a \in A : \underset{n \in \mathbb{N}}{\exists} [oa] < n\mathfrak{a} \right\},$$

$$Y := \left\{ a \in A : \underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} n\mathfrak{a} \leqslant [oa] \right\}.$$

Zbiory X, Y są rozłączne i sumują się do półprostej A. Dla dowolnych punktów $x \in X$ oraz $y \in Y$, istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $[ox] < n\mathfrak{a} \leqslant [oy]$, a więc zachodzi $ox < oy$ oraz $B(oxy)$. Ponadto zbiór X jest niepusty. Przypuśćmy nie wprost, że Y również jest niepusty. Wówczas na podstawie twierdzenia 2.31 istnieje na półprostej A punkt p taki, że $\overline{op} \subseteq X$ oraz $\overrightarrow{po}^* \subseteq Y$. Rozważmy przypadki:

(a) $p \in X$. Wówczas istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $[op] < n\mathfrak{a}$. Na półprostej $\overrightarrow{po}^*$ znajdujemy punkt q taki, że $[pq] = \mathfrak{a}$. Wówczas zachodzi $B(opq)$, $q \in Y$ oraz $[oq] = [op] + [pq] < n\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = (n+1)\mathfrak{a}$. Otrzymaliśmy sprzeczność.

(b) $p \in Y$. Wówczas $\mathfrak{a} < 2\mathfrak{a} \leqslant [op]$. Istnieje punkt q taki, że $B(oqp)$ oraz $[pq] = \mathfrak{a}$. Wtedy $q \in X$, a zatem istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $[oq] < n\mathfrak{a}$. Mamy $[op] = [oq] + [qp] < n\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = (n + 1)\mathfrak{a}$, co przeczy warunkowi $p \in Y$.

Przypuszczenie, że Y jest niepusty, doprowadziło nas do sprzeczności, a więc $X = A$. Znajdując teraz na półprostej A punkt b taki, że $[ob] = \mathfrak{b}$, dostajemy $b \in X$ i stąd $n\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$. □

Zachodzi następujące analogiczne twierdzenie dla kątów.

Twierdzenie 4.2. *Dla dowolnych kątów swobodnych $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ istnieje liczba $n \in \mathbb{N}$ taka, że jeśli istnieje iloczyn $n\mathfrak{A}$, to $n\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$.*

Dowód. Weźmy pewną półpłaszczyznę M o brzegu L, półprostą A o początku o zawartą w L i rozważmy rodzinę $\mathcal{H}$ wszystkich półprostych o początku o zawartych w M. Podzielmy rodzinę $\mathcal{H}$ na dwa podzbiory:

$$\mathcal{X} := \{P \in \mathcal{H} : \underset{n \in \mathbb{N}}{\exists} \text{ Jeśli istnieje } n\mathfrak{A} \text{ to } [AP] < n\mathfrak{A}\},$$

$$\mathcal{Y} := \{P \in \mathcal{H} : \underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \text{ Istnieje } n\mathfrak{A} \text{ oraz } n\mathfrak{A} \leqslant [AP]\}.$$

Zbiory $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ są rozłączne i sumują się do $\mathcal{P}$. Zbiór $\mathcal{X}$ jest niepusty (bo można odłożyć w tej półpłaszczyźnie kąt mniejszy od $\mathfrak{A}$). Ponadto dla dowolnych półprostych $X \in \mathcal{X}$ oraz $Y \in \mathcal{Y}$ zachodzi $A - X - Y$, bo istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $[AX] < n\mathfrak{A} \leqslant [AY]$.

Przypuśćmy nie wprost, że $\mathcal{Y}$ jest niepusty. W szczególności $n\mathfrak{A}$ istnieje dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Na podstawie twierdzenia 2.34 istnieje półprosta $P \in \mathcal{H}$ taka, że z warunku $A - X - P$ wynika $X \in \mathcal{X}$, a z warunku $P - Y - A^*$ wynika $Y \in \mathcal{Y}$. Rozważmy przypadki:

(a) $P \in \mathcal{X}$. Wówczas istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $[AP] < n\mathfrak{A}$. Istnieje półprosta Q o początku o taka, że $[PQ] = \mathfrak{A}$ oraz półproste A, Q leżą po różnych stronach prostej $L(P)$. Wtedy z istnienia $(n+1)\mathfrak{A}$ wynika $A - P - Q$, a ponadto $[AQ] = [AP] + [PQ] < n\mathfrak{A} + \mathfrak{A} = (n+1)\mathfrak{A}$. Z drugiej strony $Q \in \mathcal{Y}$, więc otrzymaliśmy sprzeczność.

(b) $P \in \mathcal{Y}$. Wówczas $\mathfrak{A} < 2\mathfrak{A} \leqslant [AP]$, więc istnieje półprosta Q o początku o taka, że $A - Q - P$ oraz $[PQ] = \mathfrak{A}$. Wtedy $Q \in \mathcal{X}$, więc istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $[AQ] < n\mathfrak{A}$. Dostajemy $[AP] = [AQ] + [QP] < \mathfrak{A} + n\mathfrak{A} = (n+1)\mathfrak{A}$, co przeczy warunkowi $P \in \mathcal{Y}$.

Zatem zbiór $\mathcal{Y}$ jest pusty i znajdując półprostą $P \in \mathcal{H}$ taką, że $[AP] = \mathfrak{B}$, dostajemy tezę. $\square$

Zadania. Udowodnij.

1. Dla dowolnych odcinków swobodnych $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ istnieje liczba $k \in \mathbb{N}$ taka, że $\frac{1}{2^k}\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$.

2. Dla dowolnych kątów swobodnych $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ istnieje liczba $k \in \mathbb{N}$ taka, że $\frac{1}{2^k}\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$.

4.2 Mnożenie odcinków i kątów swobodnych przez liczbę dodatnią

Celem tej sekcji jest przygotowanie własności potrzebnych do wyprowadzenia twierdzeń o miarach odcinków i kątów. Ze względu na obszerność rozumowań większość dowodów pomijamy.

Mówimy, że odcinek swobodny $\mathfrak{b}$ jest *iloczynem* odcinka $\mathfrak{a}$ i liczby rzeczywistej $x > 0$, gdy dla dowolnych liczb dwójkowych dodatnich ω, ν takich, że $\omega < x < \nu$, zachodzi $\omega\mathfrak{a} < \mathfrak{b} < \nu\mathfrak{a}$. Z pomocą aksjomatu ciągłości można już udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.3. *Dla dowolnego odcinka swobodnego $\mathfrak{a}$ i liczby rzeczywistej $x > 0$ istnieje dokładnie jeden odcinek $\mathfrak{b}$ będący iloczynem $\mathfrak{a}$ oraz x.*

Iloczyn odcinka $\mathfrak{a}$ i liczby rzeczywistej $x > 0$ oznaczamy symbolem $x\mathfrak{a}$. Gdy $x = \frac{n}{m} > 0$ jest liczbą wymierną (gdzie $n, m \in \mathbb{N}$), zaś $\mathfrak{a}$ oraz $\mathfrak{c}$ są odcinkami takimi, że $m\mathfrak{c} = \mathfrak{a}$, to $\frac{n}{m}\mathfrak{a} = n\mathfrak{c}$, przy czym po prawej stronie równości mamy mnożenie według pierwotnej definicji (przez liczby naturalne), a po lewej stronie mamy mnożenie według nowej definicji (przez liczby rzeczywiste). W szczególności mnożenie przez liczby dwójkowe daje ten sam wynik według obu definicji.

Twierdzenie 4.4. *Dla dowolnych odcinków swobodnych $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ oraz dowolnych liczb dodatnich x, y zachodzą następujące własności.*

1. $(x + y)\mathfrak{a} = x\mathfrak{a} + y\mathfrak{a}$.
2. $x\mathfrak{a} + x\mathfrak{b} = x(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$.
3. $x(y\mathfrak{a}) = (xy)\mathfrak{a}$.
4. $x\mathfrak{a} < y\mathfrak{a}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $x < y$.
5. $x\mathfrak{a} < x\mathfrak{b}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$.

Twierdzenie 4.5. *Dla dowolnych odcinków swobodnych $\mathfrak{a}$ oraz $\mathfrak{b}$ istnieje dokładnie jedna liczba $x > 0$ taka, że $\mathfrak{a} = x\mathfrak{b}$.*

Mówimy, że kąt swobodny $\mathfrak{B}$ jest *iloczynem* kąta $\mathfrak{A}$ i liczby rzeczywistej $x > 0$, gdy dla dowolnych liczb dwójkowych dodatnich ω, ν takich, że $\omega < x < \nu$, kąt $\omega\mathfrak{A}$ istnieje i $\omega\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ oraz jeśli istnieje $\nu\mathfrak{A}$, to $\mathfrak{B} < \nu\mathfrak{A}$.

Twierdzenie 4.6. *Jeśli istnieje iloczyn kąta swobodnego i liczby dodatniej, to jest on wyznaczony jednoznacznie. Jeśli $\mathfrak{A}$ jest kątem swobodnym, $0 < x < y$ oraz istnieje iloczyn $y\mathfrak{A}$, to istnieje iloczyn $x\mathfrak{A}$ oraz zachodzi $x\mathfrak{A} < y\mathfrak{A}$.*

Iloczyn kąta swobodnego $\mathfrak{A}$ i liczby $x > 0$, o ile istnieje, oznaczamy (podobnie jak wyżej) symbolem $x\mathfrak{A}$. Gdy $x = \frac{n}{m} > 0$ jest liczbą wymierną (gdzie $n, m \in \mathbb{N}$) oraz $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ są kątami takimi, że $m\mathfrak{C} = \mathfrak{A}$, to iloczyn $\frac{n}{m}\mathfrak{A}$ według nowej definicji mnożenia (przez liczbę rzeczywistą) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje iloczyn $n\mathfrak{C}$ według pierwotnej definicji mnożenia (przez liczbę naturalną), oraz jeśli tak jest, to zachodzi $\frac{n}{m}\mathfrak{A} = n\mathfrak{C}$. W szczególności jeśli $x > 0$ jest liczbą dwójkową, to oba pojęcia mnożenia kąta przez liczbę x się pokrywają.

Twierdzenie 4.7. *Dla dowolnych kątów swobodnych $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ oraz dowolnych liczb dodatnich x, y zachodzą następujące własności.*[1]

1. *Jeśli istnieje $(x+y)\mathfrak{A}$. to istnieje $x\mathfrak{A}+y\mathfrak{A}$ i zachodzi równość $(x+y)\mathfrak{A} = x\mathfrak{A}+y\mathfrak{A}$. Odwrotnie, jeśli istnieje $x\mathfrak{A}+y\mathfrak{A}$, to istnieje $(x+y)\mathfrak{A}$ i zachodzi równość $(x + y)\mathfrak{A} = x\mathfrak{A} + y\mathfrak{A}$.*

2. *Jeśli istnieje $x(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$, to istnieje $x\mathfrak{A} + x\mathfrak{B}$ oraz zachodzi równość $x(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = x\mathfrak{A} + x\mathfrak{B}$.*

3. *Jeśli istnieje $x(y\mathfrak{A})$, to istnieje $(xy)\mathfrak{A}$ i zachodzi równość $x(y\mathfrak{A}) = (xy)\mathfrak{A}$. Odwrotnie, jeśli istnieją $(xy)\mathfrak{A}$ oraz $y\mathfrak{A}$, to istnieje $x(y\mathfrak{A})$ i zachodzi równość $x(y\mathfrak{A}) = (xy)\mathfrak{A}$.*

4. *$x\mathfrak{A} < y\mathfrak{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x < y$.*

5. *$x\mathfrak{A} < x\mathfrak{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$.*

Twierdzenie 4.8. *Dla dowolnych kątów swobodnych $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ istnieje dokładnie jedna liczba $x > 0$ taka, że $\mathfrak{A} = x\mathfrak{B}$.*

Twierdzenie 4.9. *Iloczyn $x\mathfrak{A}$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $x < 2r$, gdzie r jest liczbą taką, że $r\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$ ($\mathfrak{R}$ jest kątem swobodnym prostym).*

4.3 Miara odcinków i miara kątów

Funkcję μ określoną na zbiorze odcinków swobodnych o wartościach rzeczywistych dodatnich nazywamy *miarą odcinków swobodnych*, gdy $\mu(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mu(\mathfrak{a}) + \mu(\mathfrak{b})$ dla dowolnych odcinków $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$.

[1] W punktach 4 oraz 5 zakładamy istnienie odpowiednich iloczynów po lewej stronie równoważności.

Funkcję μ określoną na zbiorze odcinków (związanych) o wartościach rzeczywistych dodatnich nazywamy *miarą odcinków związanych*, gdy zachodzą następujące warunki.

(A) Odcinki przystające mają równe miary.

(B) $B(abc)$ implikuje $\mu(ac) = \mu(ab) + \mu(bc)$.

Każda miara μ odcinków swobodnych jednoznacznie indukuje miarę μ' odcinków związanych i odwrotnie, każda miara μ' odcinków związanych jednoznacznie indukuje miarę μ odcinków swobodnych. Związek między tymi miarami wyraża wzór $\mu'(ab) = \mu([ab])$. Z tego właśnie powodu formułujemy twierdzenia jedynie dla miar odcinków swobodnych.

Twierdzenie 4.10. *Jeśli μ jest miarą odcinków swobodnych, to $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu(\mathfrak{a}) < \mu(\mathfrak{b})$.*

Twierdzenie 4.11. *Jeśli μ jest miarą odcinków swobodnych, $\mathfrak{a}$ jest odcinkiem oraz $x > 0$, to $\mu(x\mathfrak{a}) = x\mu(\mathfrak{a})$.*

Miara odcinków przemnożona przez liczbę dodatnią jest miarą odcinków. Zachodzi również twierdzenie odwrotne.

Twierdzenie 4.12. *Jeśli μ oraz ν są miarami odcinków, to istnieje $\lambda > 0$ takie, że $\mu = \lambda\nu$.*

Twierdzenie 4.13. *Dla dowolnego odcinka $\mathfrak{a}$ i liczby $x > 0$ istnieje dokładnie jedna miara μ taka, że $\mu(\mathfrak{a}) = x$.*

Twierdzenie 4.14. *Dla dowolnej miary odcinków μ oraz liczby $x > 0$ istnieje odcinek $\mathfrak{a}$ taki, że $\mu(\mathfrak{a}) = x$.*

Funkcję μ określoną na zbiorze kątów swobodnych o wartościach rzeczywistych dodatnich nazywamy *miarą kątów swobodnych*, gdy $\mu(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \mu(\mathfrak{A}) + \mu(\mathfrak{B})$ dla dowolnych kątów $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ takich, że $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ istnieje. Podobnie jak w przypadku odcinków, definiuje się też miarę kątów związanych.

Twierdzenie 4.15. *Jeśli μ jest miarą kątów swobodnych, to $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu(\mathfrak{A}) < \mu(\mathfrak{B})$.*

Twierdzenie 4.16. *Jeśli μ jest miarą kątów swobodnych, $x > 0$ oraz istnieje iloczyn $x\mathfrak{A}$, to $\mu(x\mathfrak{A}) = x\mu(\mathfrak{A})$.*

Twierdzenie 4.17. *Dla dowolnej miary kątów, suma miar kątów przyległych $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^*$ jest równa $2r$, gdzie r jest miarą kąta swobodnego prostego. W szczególności miara dowolnego kąta jest mniejsza od $2r$.*

Twierdzenie 4.18. *Jeśli μ oraz ν są miarami kątów, to istnieje $\lambda > 0$ takie, że $\mu = \lambda\nu$.*

Twierdzenie 4.19. *Dla dowolnego kąta $\mathfrak{A}$ i liczby $x > 0$ istnieje dokładnie jedna miara kątów taka, że $\mu(\mathfrak{A}) = x$.*

Twierdzenie 4.20. *Suma $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu(\mathfrak{A}) + \mu(\mathfrak{B}) < 2r$, gdzie r jest miarą kąta prostego, przy czym warunek ten nie zależy od wyboru miary.*

Twierdzenie 4.21. *Iloczyn $x\mathfrak{A}$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $x\mu(\mathfrak{A}) < 2r$, gdzie r jest miarą kąta prostego, przy czym warunek ten nie zależy od wyboru miary.*

Twierdzenie 4.22. *Dla dowolnej miary kątów μ oraz liczby $x \in (0, 2r)$, gdzie r jest miarą kąta prostego, istnieje dokładnie jeden kąt swobodny $\mathfrak{A}$ taki, że $\mu(\mathfrak{A}) = x$.*

Od tej pory swobodnie posługujemy się miarami odcinków i kątów (związanych), przy czym miary te oznaczamy przez $|\cdot|$.[2] Miarę $|ab|$ nazywamy też *odległością* między punktami a i b. Wybieramy taką miarę kątów, dla której miara kąta prostego wynosi dokładnie 90. Z drugiej strony nie mamy w tym momencie żadnej wyróżnionej miary odcinków. Mimo to uważamy miarę odcinków za ustaloną. Zwyczajowo dopisuje się znak stopnia przy miarach kątów i tak też robimy.

Twierdzenie 4.23 (Uogólniona nierówność trójkąta)**.** *Jeśli $a_1 \dots a_n$ jest łamaną, gdzie $n \geqslant 2$, to zachodzi nierówność*

$$|a_1 a_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |a_k a_{k+1}|.$$

[2]Czasem używamy symbolu $|ab|$ również, gdy $a = b$. Oznacza on wówczas liczbę 0.

Dowód. Przez indukcję z użyciem twierdzenia 3.50. □

Gdy L jest prostą, a p punktem to istnieje najmniejsza możliwa odległość między punktem p i punktami prostej L. Istotnie, jest to odległość punktu p od rzutu prostopadłego p na prostą L. Liczbę tę nazywamy *odległością* punktu p od prostej L.

Zadania. Udowodnij.

1. Suma miar dwóch kątów wewnętrznych w trójkącie jest mniejsza niż $180°$.

4.4 Twierdzenie Saccheriego–Legendre'a

Twierdzenie 4.24 (Saccheriego-Legendre'a)**.** *Suma miar kątów wewnętrznych w dowolnym trójkącie jest mniejsza lub równa* $180°$*.*

Dowód. Rozważmy dowolny trójkąt o wierzchołkach o, a, b. Niech

$$|\angle boa| = \alpha, |\angle bao| = \beta, |\angle oba| = \gamma.$$

Przypuśćmy nie wprost, że $\alpha + \beta + \gamma > 180°$. Niech M będzie tą półpłaszczyzną o brzegu $\overleftrightarrow{oa}$, w której leży punkt b.

Określamy indukcyjnie na półprostej $\overrightarrow{oa}$ ciąg punktów (a_n) przez warunki:

(A) $a_0 = o$, $a_1 = a$,

(B) $a_n a_{n+1} \equiv oa$, $B(oa_n a_{n+1})$ dla $n \geqslant 1$,

oraz ciąg (b_n) punktów leżących w M taki, że $\triangle a_{n-1} a_n b_n \equiv \triangle oab$ dla $n \geqslant 1$ (Istnienie takiego ciągu wynika z warunku (B) oraz twierdzenia 3.12).

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Kąt $\angle b_n a_n a_{n+1}$ jest kątem zewnętrznym w trójkącie $\triangle a_{n-1} a_n b_n$, więc na mocy twierdzenia 3.28 mamy

$$\angle b_n a_n a_{n+1} > \angle b_n a_{n-1} a_n \equiv boa \equiv b_{n+1} a_n a_{n+1}.$$

Ponieważ punkty b_n i b_{n+1} leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{oa} = \overleftrightarrow{a_n a_{n+1}}$, warunek powyższy wystarcza do stwierdzenia, że

$$\overrightarrow{a_n a_{n+1}} - \overrightarrow{a_n b_{n+1}} - \overrightarrow{a_n b_n},$$

a więc z definicji miary

$$|\angle b_n a_n b_{n+1}| + |\angle b_{n+1} a_n a_{n+1}| = |\angle b_n a_n a_{n+1}| = 180^\circ - |\angle b_n a_n a_{n-1}|,$$

gdzie ostatnia równość wynika stąd, że kąty $\angle b_n a_n a_{n+1}$, $\angle b_n a_n a_{n-1}$ są przyległe. Wówczas

$$|\angle b_n a_n b_{n+1}| = 180^\circ - \alpha - \beta < \gamma.$$

Na mocy cechy przystawania b-k-b wszystkie trójkąty $\triangle b_n a_n b_{n+1}$ są do siebie przystające, a ponieważ mamy także $b_n a_n \equiv ba$, $b_{n+1} a_n \equiv bo$, więc z twierdzenia 3.33 wynika $b_n b_{n+1} < oa$.

Z uogólnionej nierówności trójkąta zastosowanej do łamanej $oa_n b_n \dots b$ dostajemy

$$|oa_n| \leqslant |ob| + \sum_{i=1}^{n-1} |b_{i+1} b_i| + |b_n a_n|$$

$$n|oa| \leqslant |ob| + (n-1)|b_2 b_1| + |ab|$$

$$n(|oa| - |b_2 b_1|) \leqslant |ob| + |ab| - |b_2 b_1|.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż n było dowolne, a $|oa| - |b_2 b_1| > 0$. $\square$

Zadania. Udowodnij.

1. Suma miar kątów wewnętrznych w dowolnym czworokącie wypukłym jest mniejsza bądź równa 360°.

4.5 Czworokąty Saccheriego i Lamberta

Jeśli w czworokącie wypukłym $\square abcd$ kąty wewnętrzne przy wierzchołkach b i c są proste, zaś boki ab i cd są przystające, to czworokąt ten nazywamy *czworokątem Sacchieriego* o *podstawie dolnej* bc i *podstawie górnej* ad.

Czworokąt wypukły o trzech kątach prostych nazywamy *czworokątem Lamberta*, zaś czworokąt wypukły o czterech kątach prostych nazywamy *prostokątem*.

Uwaga. Spodziewalibyśmy się, że wszystkie czworokąty Saccheriego i Lamberta są prostokątami. Taki dowód jest jednak niemożliwy w geometrii neutralnej, a wspomniane czworokąty odgrywają szczególną rolę w geometrii hiperbolicznej.

Twierdzenie 4.25. *W czworokącie Saccheriego kąty wewnętrzne przy podstawie górnej są przystające.*

Dowód. Niech $\square abcd$ będzie czworokątem Saccheriego o podstawie dolnej bc. Wówczas na podstawie cechy przystawania b-k-b mamy $\triangle abc \equiv \triangle dcb$. Z przystawania wynika $ac \equiv bd$ oraz $\angle acb \equiv dbc$. Na mocy twierdzenia 3.9 mamy $\angle abd \equiv \angle dca$ i na mocy cechy przystawania b-k-b zachodzi $\triangle abd \equiv \triangle dca$. Z przystawania tych trójkątów dostajemy $\angle bad \equiv \angle cda$. $\square$

Ponieważ suma miar kątów wewnętrznych w czworokącie wypukłym jest mniejsza bądź równa 360°, więc jako wniosek z twierdzenia 4.25 dostajemy, że w czworokącie Saccheriego kąty wewnętrzne przy podstawie górnej są proste lub ostre. Podobnie w czworokącie Lamberta czwarty kąt jest prosty lub ostry.

Twierdzenie 4.26. *Dany jest czworokąt wypukły $\square abcd$, w którym kąty wewnętrzne przy wierzchołkach b i c są proste. Wówczas $ab > cd$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\angle bad < \angle cda$.*

Dowód. Niech $\square abcd$ będzie czworokątem wypukłym spełniającym założenia. Załóżmy, że $ab > cd$. Wówczas istnieje punkt e taki, że $B(bea)$ oraz $cd \equiv be$. Zachodzi wtedy $\overrightarrow{dc} - \overrightarrow{db} - \overrightarrow{de} - \overrightarrow{da}$, a czworokąt $\square ebcd$ jest czworokątem Saccheriego. Ostatecznie z twierdzenie o kącie zewnętrznym i twierdzenia 4.25 mamy

$$\angle bad = \angle ead < \angle bed \equiv \angle edc < \angle cda.$$

$\square$

Zadania. Udowodnij.

1. W prostokącie boki leżące naprzeciwko siebie są przystające.

4.6 Pewnik Arystotelesa

Twierdzenie 4.27. *Dany jest kąt ostry AB o wierzchołku o. Dla każdego odcinka pq istnieje punkt a leżący na półprostej A taki, że $ab > pq$, gdzie punkt b jest rzutem prostopadłym punktu a na prostą $L(B)$.*

Dowód. Dla każdego punktu x leżącego na półprostej A niech p_x oznacza rzut prostopadły x na prostą $L(B)$. Określamy funkcję $\varphi\colon A \to (0, \infty)$ wzorem $\varphi(x) := |xp_x|$. Dla dowolnych punktów x, y na półprostej A takich, że $B(oxy)$, na podstawie twierdzenia o kącie zewnętrznym kąt $\angle p_x xy$ jest rozwarty, a kąt $\angle p_y yx$ jest ostry, więc z twierdzenia 4.26 jest $\varphi(x) < \varphi(y)$.

Pokażemy, że dla dowolnych punktów x, y, z leżących na półprostej A takich, że $B(oxyz)$ oraz $xy \equiv yz$, zachodzi $\varphi(z) - \varphi(y) \geqslant \varphi(y) - \varphi(x)$. Ustalmy takie punkty x, y, z. Niech r będzie punktem takim, że $p_y r \equiv p_x x$ oraz $B(p_y ry)$, a s punktem takim, że $p_y s \equiv p_z z$ oraz $B(p_y ys)$. Wówczas $\square xp_x p_y r$ oraz $\square zp_z p_y s$ są czworokątami Saccheriego. Niech dalej punkt t będzie taki, że $B(p_y ryt)$ oraz $yr \equiv yt$. Wówczas trójkąty $\triangle yrx$ oraz $\triangle ytz$ są przystające.

Mamy $\angle p_y tz = \angle ytz \equiv \angle yrx$ i kąt ten jest prosty lub rozwarty jako przyległy do kąta przy górnej podstawie czworokąta Saccheriego. Kąt $\angle p_y sz$ jest z kolei ostry lub prosty jako kąt przy górnej podstawie czworokąta Saccheriego. Na mocy twierdzenia o kącie zewnętrznym zachodzi $s = t$ lub $B(p_y ts)$. Zatem

$$\varphi(z) = |zp_z| = |sp_y| \geqslant |tp_y| = |ty| + |yp_y| = |yr| + \varphi(y) =$$

$$= |yp_y| - |rp_y| + \varphi(y) = 2\varphi(y) - |xp_x| = 2\varphi(y) - \varphi(x).$$

Znajdźmy na półprostej A ciąg punktów $(x_1, x_2, \ldots)$ taki, że $B(ox_n x_{n+1})$ oraz $x_n x_{n+1} \equiv ox_1$. Wówczas na mocy udowodnionej własności dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n) \geqslant \varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1}) \geqslant \ldots \geq \varphi(x_2) - \varphi(x_1) \geqslant \varphi(x_1),$$

przy czym $x_0 = o$ oraz $\varphi(o) = 0$. Sumując odpowiednie nierówności stronami otrzymujemy

$$\varphi(x_n) \geqslant n \cdot \varphi(x_1).$$

Ponieważ $\varphi(x_1) > 0$, więc istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $\varphi(x_n) > |pq|$. $\square$

Twierdzenie 4.28. *Dana jest półprosta A o początku a oraz punkt x nie leżący na prostej $L(A)$. Wówczas dla każdego kąta PQ istnieje punkt b leżący na półprostej A taki, że $\angle abx < PQ$.*

Dowód. Ustalmy półprostą A, punkt p i kąt PQ takie jak w założeniach. Udowodnimy twierdzenie najpierw w szczególnym przypadku, gdy rzut prostopadły punktu x na prostą $L(A)$ jest równy punktowi a. Jeżeli kąt PQ jest prosty lub rozwarty, to za b można przyjąć dowolny punkt na półprostej A. Załóżmy zatem, że kąt PQ jest ostry. Oznaczmy przez o wierzchołek kąta PQ. Na podstawie twierdzenia 4.27 istnieje na półprostej P punkt p taki, że $pq > ax$, gdzie q jest rzutem prostopadłym punktu p na prostą $L(Q)$. Ponieważ kąt PQ jest ostry, więc punkt q leży na półprostej Q i $PQ = \angle poq$. Na półprostej A znajdźmy punkt b taki, że $ab \equiv oq$. Istnieje punkt y taki, że $B(axy)$ oraz $ay \equiv pq$. Na podstawie cechy przystawania b-k-b mamy $\triangle yab \equiv \triangle pqo$. Z przystawania wynika

$$\angle abx < \angle aby \equiv \angle qop = PQ.$$

W przypadku ogólnym rozważamy półprostą A' o początku w punkcie a', który jest rzutem prostopadłym punktu x na prostą $L(A)$, zgodnie zorientowaną z półprostą A. Na podstawie udowodnionej części na półprostej A' istnieje punkt b' taki, że taki, że $\angle a'b'x < PQ$. Jeśli punkt b' leży na półprostej A, to zachodzi $\angle ab'x = \angle a'b'x < PQ$. Jeśli punkt b' nie leży na półprostej A, to biorąc za b dowolny punkt na półprostej A, z twierdzenia o kącie zewnętrznym dostajemy $\angle abx = \angle a'bx < \angle a'b'x < PQ$. □

4.7 Okręgi i koła

Okręgiem o środku w punkcie o i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór $O(o, r) := \{p \in \mathbb{P} : |op| = r\}$. *Kołem otwartym* o środku w punkcie o i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór $K(o, r) = \{p \in \mathbb{P} : |op| < r\}$. *Kołem domkniętym* o środku w punkcie o i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór $\overline{K}(o, r) = \{p \in \mathbb{P} : |op| \leqslant r\}$.[3] *Cięciwą* okręgu nazywamy odcinek łączący dwa różne punkty na tym okręgu. *Średnicą* okręgu nazywamy cięciwę, która przechodzi przez środek tego okręgu.

[3]Gdy mówimy, że punkt *leży wewnątrz* okręgu O, mamy na myśli, że leży on w kole otwartym o tym samym środku i promieniu. Gdy mówimy z kolei, że punkt *leży na zewnątrz* okręgu O, mamy na myśli, że leży poza kołem domkniętym o tym samym środku i promieniu.

Twierdzenie 4.29. *Dany jest okrąg o środku w punkcie o i promieniu $r > 0$. Jeśli różne punkty a i b leżą w kole domkniętym $\overline{K}(o,r)$, to odcinek $\overline{ab}$ jest zawarty w kole otwartym $K(o,r)$.*

Dowód. Ustalmy punkty o, a, b oraz promień $r > 0$ takie jak w założeniach. Niech punkt p będzie taki, że $B(apb)$. Jeśli punkty o, a, b są współliniowe, to rozważając wszystkie możliwe przypadki, stwierdzamy nierówność $|op| < \max\{|oa|, |ob|\} \leqslant r$. Załóżmy zatem, że punkty o, a, b są niewspółliniowe. Kąty $\angle opa$ oraz $\angle opb$ są przyległe, więc jeden z nich jest prosty lub rozwarty. Jeśli kąt $\angle opa$ jest prosty lub rozwarty, to na mocy twierdzenia 3.40 kąt $\angle oap$ jest ostry, a stąd na mocy twierdzenia 3.31 jest $|op| < |oa| \leqslant r$. Jeśli kąt $\angle opb$ jest prosty lub rozwarty, to rozumujemy analogicznie. □

Jako wniosek z twierdzenia 4.29 dostajemy, że każda cięciwa okręgu jest zawarta wewnątrz koła otwartego (o tym samym środku i promieniu). Ponadto koło domknięte i koło otwarte są zbiorami wypukłymi.

Twierdzenie 4.30. *Dane są dwa różne punkty a i b leżące na okręgu o środku w punkcie o i promieniu $r > 0$. Wówczas dowolny punkt p taki, że $B(pab)$ lub $B(abp)$, leży poza kołem domkniętym $\overline{K}(o,r)$.*

Dowód. Ustalmy punkty o, a, b, p oraz promień $r > 0$ takie jak w założeniach, przy czym dla ustalenia uwagi zakładamy, że $B(pab)$. Jeśli punkty o, a, b są współliniowe, to o jest środkiem odcinka ab oraz zachodzi $B(paob)$, a wówczas $|op| > |oa| = r$. Załóżmy zatem, że punkty o, a, b są niewspółliniowe. Wówczas trójkąt $\triangle oab$ jest równoramienny, więc kąt $\angle oab$ jest ostry, a kąt $\angle oap$ jest rozwarty. Na podstawie twierdzenia 3.40 kąt $\angle opa$ jest ostry, i dalej na mocy twierdzenia 3.31 jest $|op| > |oa| = r$. □

Z twierdzeń 4.29 oraz 4.30 wynika, że dowolna prosta ma z okręgiem co najwyżej dwa punkty wspólne, lub innymi słowy dowolne trzy różne punkty leżące na okręgu są niewspółliniowe. Ponadto jeśli prosta L ma z okręgiem $O(o,r)$ dwa różne punkty wspólne a i b, to odcinek $\overline{ab}$ jest równy przekrojowi koła otwartego $K(o,r)$ i prostej $\overleftrightarrow{ab}$.

Twierdzenie 4.31. *Dany jest okrąg o środku w punkcie o i promieniu $r > 0$. Dla dowolnego punktu p leżącego wewnątrz koła otwartego $K(o,r)$ koło* *otwarte $K(p, r-|op|)$ jest zawarte w $K(o,r)$. Podobnie, dla dowolnego punktu p leżącego poza kołem domkniętym $\overline{K}(o,r)$ koło otwarte $K(p, |op|-r)$ jest rozłączne z $\overline{K}(o,r)$.*[4]

Dowód. Ustalmy punkt o oraz promień $r > 0$. Jeśli p leży wewnątrz koła $K(o,r)$, a x jest punktem takim, że $|px| \leqslant r - |op|$, to z nierówności trójkąta mamy $|ox| \leqslant |op| + |px| < r$. Podobnie, jeśli p leży poza kołem $\overline{K}(o,r)$, a y jest punktem takim, że $|py| < |op| - r$, to $|oy| \geqslant |op| - |py| > r$. $\square$

Twierdzenie 4.32. *Dany jest okrąg o środku w punkcie o i promieniu $r > 0$. Dla dowolnych punktów a, b takich, że $|oa| < r < |ob|$, istnieje dokładnie jeden punkt p leżący na odcinku $\overline{ab}$ i jednocześnie na okręgu $O(o,r)$.*

Dowód. Ustalmy punkty o, a, b oraz promień $r > 0$ takie jak w założeniach. Dla dowodu istnienia punktu p definiujemy

$$X := \{x \in \overline{ab} \colon |ox| < r\},$$

$$Y := \{y \in \overline{ab} \colon |oy| > r\},$$

przy czym przypuszczamy nie wprost, że $X \cup Y = \overline{ab}$. Jeśli $x \in X$ oraz $y \in Y$, to zachodzi $B(axy)$, gdyż w przeciwnym razie byłoby $B(ayx)$, co jest sprzeczne z twierdzeniem 4.29. Istnieje na półprostej $\overrightarrow{ab}$ punkt x taki, że $|ax| < r - |oa|$ oraz istnieje na półprostej $\overrightarrow{ba}$ punkt y taki, że $|by| < |ob| - r$. Na podstawie twierdzenia 4.31 punkt x leży w zbiorze X, a punkt y leży w zbiorze Y.

Spełnione są założenia twierdzenia 2.32, a zatem istnieje na odcinku $\overline{ab}$ punkt p taki, że $\overline{ap} \subseteq X$ oraz $\overline{bp} \subseteq Y$. Rozważmy przypadki:

(a) $|op| < r$. Wówczas istnieje na półprostej $\overrightarrow{pb}$ punkt q taki, że $|pq| < r - |op|$. Na podstawie twierdzenia 4.31 punkt q leży w kole $K(o,r)$ oraz w zbiorze X. Z drugiej strony punkt q leży na odcinku $\overline{pb} \subseteq Y$, sprzeczność.

(b) $|op| > r$. Wówczas istnieje na półprostej $\overrightarrow{pa}$ punkt q taki, że $|pq| < |op| - r$. Na podstawie twierdzenia 4.31 punkt q leży poza kołem $\overline{K}(o,r)$ oraz w zbiorze Y. Z drugiej strony punkt q leży na odcinku $\overline{pa} \subseteq X$, sprzeczność.

[4] Są to dobrze znane ogólne własności kul w przestrzeniach metrycznych.

Dowodzi to istnienia punktu p leżącego na odcinku $\overline{ab}$ i jednocześnie na okręgu $O(o, r)$.

Przypuśćmy teraz, że istnieje inny punkt p' leżący na odcinku $\overline{ab}$ i jednocześnie na okręgu $O(o, r)$. Wówczas zachodzi $B(app')$ lub $B(ap'p)$. W obu przypadkach na podstawie twierdzenia 4.30 punkt a leży poza kołem $\overline{K}(o, r)$, co jest niemożliwe. □

Twierdzenie 4.33. *Dany jest okrąg o środku w punkcie o i promieniu* $r > 0$. *Dowolna półprosta* A *o początku w punkcie leżącym wewnątrz koła* $K(o, r)$ *ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem* $O(o, r)$.

Dowód. Ustalmy punkt o, promień $r > 0$ oraz półprostą A o początku w punkcie a takie jak w założeniach. Na półprostej A znajdźmy punkt b taki, że $|ab| = 2r$. Wówczas $|ob| > |ob| + |oa| - r \geqslant |ab| - r = r$, więc z twierdzenia 4.32 odcinek $\overline{ab}$ ma punkt wspólny z okręgiem $O(o, r)$.

Dowód jednoznaczności przebiega identycznie jak w twierdzeniu 4.32. □

Mówimy, że prosta L jest *styczna* do okręgu O (w punkcie p), gdy ma ona dokładnie jeden punkt wspólny p z tym okręgiem. Mówimy, że prosta L jest *sieczna* do okręgu O, gdy ma ona dokładnie dwa punkty wspólne z tym okręgiem.

Twierdzenie 4.34. *Dana jest prosta* L *oraz okrąg o środku w punkcie* o *i promieniu* $r > 0$. *Wówczas zachodzą następujące warunki.*

(i) Prosta L *jest sieczna do okręgu* $O(o, r)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy odległość* L *od punktu* o *jest mniejsza niż* r.

(ii) Prosta L *jest styczna do okręgu* $O(o, r)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy odległość* L *od punktu* o *jest równa* r.

(iii) Prosta L *jest rozłączna z okręgiem* $O(o, r)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy odległość* L *od punktu* o *jest większa niż* r.

Dowód. Ustalmy prostą L oraz okrąg O o środku w punkcie o i promieniu $r > 0$. Niech p będzie rzutem prostopadłym punktu o na prostą L. Jeśli $|op| < r$, to na podstawie twierdzenia 4.33 obie półproste o początku w punkcie p zawarte w L przecinają okrąg O, a więc prosta L jest sieczna do O.

Wiadomo, że $|op'| > |op|$ dla dowolnego punktu p' na prostej L różnego od p. Zatem jeśli $|op| = r$, to prosta L jest styczna do okręgu O, a jeśli $|op| > r$, to L jest rozłączna z O. □

Gdy różne punkty a i b leżą na okręgu O, to *łukiem otwartym* (na okręgu O) nazywamy część wspólną okręgu O oraz półpłaszczyzny o brzegu $\overleftrightarrow{ab}$, przy czym punkty a i b nazywamy *końcami* tego łuku. Łuk otwarty wraz z końcami nazywamy *łukiem domkniętym.* Każde dwa różne punkty na okręgu wyznaczają dwa łuki, które nazywamy *dopełniającymi.* Jeśli J jest łukiem, to łuk dla niego dopełniający oznaczamy J^*. Zachodzi $(J^*)^* = J$.

Twierdzenie 4.35. *Dany jest okrąg O o środku w punkcie o oraz różne punkty a i b leżące na tym okręgu, przy czym o, a, b są niewspółliniowe. Wówczas przekrój wnętrza kąta $\angle aob$ z okręgiem O jest równy łukowi na okręgu O wyznaczonemu przez tę półpłaszczyznę o brzegu $\overleftrightarrow{ab}$, która nie zawiera punktu o.*

Dowód. Ustalmy punkty o, a, b i okrąg O o promieniu r takie jak w założeniach.

Weźmy punkt p leżący jednocześnie na okręgu O i we wnętrzu kąta $\angle aob$. Odcinek $\overline{ab}$ ma punkt wspólny q z półprostą $\overrightarrow{op}$. Zachodzi $B(opq)$ lub $p = q$ lub $B(oqp)$. Przypuszczenie $B(opq)$ lub $p = q$ prowadzi do sprzeczności $r = |op| \leqslant |oq| < r$, gdzie ostatnia nierówność wynika z twierdzenia 4.29. Zatem $B(oqp)$ i punkt p leży w odpowiedniej półpłaszczyźnie.

Weźmy teraz punkt p leżący jednocześnie na okręgu O i w półpłaszczyźnie o brzegu $\overleftrightarrow{ab}$, która nie zawiera punktu o. Odcinek $\overline{op}$ przecina prostą $\overleftrightarrow{ab}$ w pewnym punkcie q. Wtedy $|oq| < |op| = r$, a więc na podstawie twierdzenia 4.30 punkt q leży na odcinku $\overline{ab}$ i punkt p leży we wnętrzu kąta $\angle aob$. □

Twierdzenie 4.36. *Dany jest okrąg O o środku w punkcie o oraz łuk J na tym okręgu o końcach a i b. Prosta L jest prostopadła do prostej $\overleftrightarrow{ab}$ i przechodzi przez punkt o, przy czym przecina ona łuk J w punkcie c. Wówczas łuk J jest równy sumie $J_a \cup \{c\} \cup J_b$, gdzie J_a jest przekrojem* *okręgu O i wnętrza kąta $\angle aoc$, a J_b jest jest przekrojem okręgu O i wnętrza kąta $\angle boc$.*

Dowód. Ustalmy okrąg O o środku w punkcie o oraz łuk J na tym okręgu o końcach a i b, przy czym J jest zawarty w półpłaszczyźnie M o brzegu $\overleftrightarrow{ab}$. Rozważmy przypadki:

(a) Punkt o nie leży w półpłaszczyźnie M. Na podstawie twierdzenia 4.35 łuk J jest równy przekrojowi okręgu O i wnętrza kąta $\angle aob$. Wystarczy zatem zauważyć, że $\overrightarrow{oc}$ jest dwusieczną kąta $\angle aob$.

(b) Punkt o leży na prostej $\overleftrightarrow{ab}$. Wówczas wystarczy zauważyć, że rodzina półprostych o początku w punkcie o zawartych w półpłaszczyźnie M rozpada się na półproste zawarte we wnętrzu kąta $\angle aoc$, półprostą $\overrightarrow{oc}$ oraz półproste zawarte we wnętrzu kąta $\angle boc$.

(c) Punkt o leży w półpłaszczyźnie M. Wówczas ma mocy twierdzenia 4.35 łuk J^* jest równy przekrojowi okręgu O i wnętrza kąta $\angle aob$. Wystarczy zatem zauważyć, że rodzina wszystkich półprostych o początku w punkcie o rozpada się na półproste $\overrightarrow{oa}$, $\overrightarrow{ob}$, $\overrightarrow{oc}$ oraz półproste zawarte we wnętrzu kąta $\angle aob$, kąta $\angle aoc$ i kąta $\angle boc$.

$\square$

Okrąg O nazywamy okręgiem *wpisanym* w trójkąt $\triangle abc$, gdy jest on styczny do prostych $\overleftrightarrow{ab}$, $\overleftrightarrow{bc}$, $\overleftrightarrow{ac}$ w punktach leżących odpowiednio na odcinkach $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ac}$.

Zadania. Udowodnij.

1. Jeśli prosta L jest rozłączna z okręgiem $O(o, r)$, to wszystkie punkty koła domkniętego $\overline{K}(o, r)$ leżą po tej samej stronie prostej L.

2. Jeśli różne punkty a, b, c, d leżą na jednym okręgu oraz a i c leżą po różnych stronach prostej $\overleftrightarrow{bd}$, to $\square abcd$ jest czworokątem wypukłym.

3. Jeśli różne punkty a, b, c, d leżą na jednym okręgu oraz punkt d leży we wnętrzu kąta $\angle abc$, to $\square abcd$ jest czworokątem wypukłym.

4. Jeśli dwa okręgi są równe, to mają ten sam środek i promień.

5. Jeśli proste L_a oraz L_b są styczne do okręgu O w punktach odpowiednio a i b oraz przecinają się w punkcie p, to $pa \equiv pb$.

6. W każdy trójkąt można wpisać okrąg.

4.8 Wzajemne położenie dwóch okręgów

Twierdzenie 4.37. *Jeśli J jest łukiem otwartym o końcach a i b, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje punkt q leżący na łuku J taki, że $|aq| < \varepsilon$.*

Dowód. Ustalmy okrąg O o środku w punkcie o i promieniu $r > 0$, łuk J na okręgu O o końcach a i b. Niech prosta L będzie prostopadła do prostej $\overleftrightarrow{ab}$ i przechodząca przez punkt o, przy czym przecina ona łuk J w punkcie c. Na podstawie twierdzenia 4.36 przekrój wnętrza kąta $\angle aoc$ z okręgiem O zawiera się w łuku J. Istnieje punkt p leżący we wnętrzu kąta $\angle aoc$ taki, że $|ap| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Na półprostej $\overrightarrow{op}$ istnieje punkt q taki, że $|oq| = r$. Wówczas punkt q leży na łuku J. Rozważmy następujące przypadki:

(a) $B(oqp)$. Wówczas kąt $\angle aqp$ jest rozwarty, więc na podstawie twierdzenia 3.31 zachodzi $|aq| < |ap| < \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$.

(b) $q = p$. Wówczas $|aq| = |ap| < \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$.

(c) $B(opq)$. Wówczas wobec nierówności $\angle paq < \angle oaq \equiv \angle oqa = \angle pqa$ i twierdzenia 3.31 zachodzi

$$|aq| < |ap| + |pq| < |ap| + |ap| < 2 \cdot \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

□

Z cechy przystawania b-b-b oraz twierdzenia 3.12 wynika, że gdy dane są dwa okręgi o różnych środkach o i o', to w każdej z półpłaszczyzn o brzegu $\overleftrightarrow{oo'}$ istnieje co najwyżej jeden punkt wspólny tych okręgów. W szczególności dwa różne okręgi mają co najwyżej dwa punkty wspólne.

Twierdzenie 4.38. *Dane są różne okręgi O, O' o środkach odpowiednio w punktach o, o' i promieniach odpowiednio r, r'. Punkty a i b są punktami przecięcia okręgu O' oraz prostej $\overleftrightarrow{oo'}$, przy czym $|oa| < r < |ob|$. Wówczas* *w każdej z półpłaszczyzn o brzegu $\overleftrightarrow{oo'}$ istnieje dokładnie jeden punkt przecięcia okręgów O oraz O' i są to jedyne punkty przecięcia tych dwóch okręgów. Jeśli u oraz v są różnymi punktami przecięcia okręgów O oraz O', to prosta $\overleftrightarrow{uv}$ jest prostopadła do prostej $\overleftrightarrow{oo'}$, łuk I na okręgu O' o końcach u i v zawierający punkt a leży wewnątrz okręgu O, zaś łuk I^* leży na zewnątrz okręgu O.*

Dowód. Ustalmy punkty o, o', a, b oraz promienie r, r' takie jak w założeniach oraz półpłaszczyznę M o brzegu $\overleftrightarrow{oo'}$. Oznaczmy przez $\mathcal{H}$ rodzinę wszystkich półprostych o początku w punkcie o' zawartych w półpłaszczyźnie M. Dla każdej półprostej $P \in \mathcal{H}$ istnieje dokładnie jeden punkt u_P leżący na P taki, że $|o'u_P| = r'$. Niech

$$\mathcal{X} := \{X \in \mathcal{H}\colon |ou_X| < r\},$$

$$\mathcal{Y} := \{Y \in \mathcal{H}\colon |ou_Y| > r\},$$

przy czym przypuszczamy nie wprost, że $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y} = \mathcal{H}$. Ponieważ $M \cap O'$ jest łukiem o końcach a i b oraz $|oa| < r < |ob|$, więc z twierdzeń 4.31 oraz 4.37 wynika, że rodziny $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ są niepuste. Jeśli $X \in \mathcal{X}$ oraz $Y \in \mathcal{Y}$, to na mocy twierdzenia 3.33 zachodzi $A - X - Y$, gdzie $A := \overrightarrow{o'o}$.

Spełnione są założenia twierdzenia 2.34. Istnieje półprosta $P \in \mathcal{H}$ taka, że z warunku $A - X - P$ wynika $X \in \mathcal{X}$, a z warunku $P - Y - A^*$ wynika $Y \in \mathcal{Y}$. Rozważmy przypadki:

(a) $|ou_P| < r$. Wówczas przekrój J okręgu O' i wnętrza kąta $\angle u_P o' b = PA^*$ jest łukiem i na podstawie twierdzeń 4.31 oraz 4.37 dla $\varepsilon = r - |ou_P|$ istnieje punkt q leżący na J taki, że $|oq| < r$. Wtedy $\overrightarrow{o'q} \in \mathcal{X}$ i jednocześnie $P - \overrightarrow{o'q} - A^*$, sprzeczność.

(b) $|ou_P| > r$. Wówczas przekrój J okręgu O' i wnętrza kąta $\angle u_P o' a = PA$ jest łukiem i na podstawie twierdzeń 4.31 oraz 4.37 dla $\varepsilon = |ou_P| - r$ istnieje punkt q leżący na J taki, że $|oq| > r$. Wtedy $\overrightarrow{o'q} \in \mathcal{Y}$ i jednocześnie $P - \overrightarrow{o'q} - A$, sprzeczność.

Dowodzi to istnienia półprostej $P \in \mathcal{H}$ takiej, że $|ou_P| = r$. Punkt u_P leży na obu okręgach O oraz O', a jego jednoznaczność wynika z cechy przystawania b-b-b oraz twierdzenia 3.12. Ponieważ żaden punkt prostej

$\overleftrightarrow{oo'}$ nie jest punktem wspólnym okręgów O oraz O', istnieją dokładnie dwa punkty wspólne tych okręgów.

Jeśli u oraz v są różnymi punktami przecięcia okręgów O oraz O', a I jest łukiem na okręgu O' o końcach u i v zawierającym punkt a, to na mocy twierdzenia 4.36 zbiór $I \setminus \{a\}$ jest równy sumie odpowiednich dwóch łuków, z których każdy jest zawarty wewnątrz okręgu O, zaś zbiór $I^* \setminus \{b\}$ jest równy sumie odpowiednich dwóch łuków, z których każdy jest zawarty na zewnątrz okręgu O. $\square$

Twierdzenie 4.39. *Dane są punkty o, o' oraz liczby dodatnie r, r'.*

(i) Jeśli $r+r' < |oo'|$, to koła domknięte $\overline{K}(o,r)$ oraz $\overline{K}(o',r')$ są rozłączne.

(ii) Jeśli $r + r' = |oo'|$, to koła domknięte $\overline{K}(o,r)$ oraz $\overline{K}(o',r')$ mają dokładnie jeden punkt wspólny, który leży na obu okręgach i na odcinku $\overline{oo'}$.

(iii) Jeśli $|r-r'| < |oo'| < r+r'$, to punkty a i b przecięcia prostej $\overleftrightarrow{oo'}$ z okręgiem O' można oznaczyć w ten sposób, że $|oa| < r < |ob|$ i zachodzi teza twierdzenia 4.38.

(iv) Jeśli $0 < r - r' = |oo'|$, to okręgi $O(o,r)$ oraz $O(o',r')$ mają dokładnie jeden punkt wspólny p taki, że zachodzi $B(po'o)$, zaś koło domknięte $\overline{K}(o',r')$ zawiera się w zbiorze $K(o,r) \cup \{p\}$.

(v) Jeśli $|oo'| < r - r'$, to koło domknięte $\overline{K}(o',r')$ zawiera się w kole otwartym $K(o,r)$.

Dowód. Ustalmy punkty o, o' oraz liczby dodatnie r, r'.

(i) Załóżmy, że $r + r' < |oo'|$. Przypuśćmy, punkt że a leży jednocześnie w kołach domkniętych $\overline{K}(o,r)$ oraz $\overline{K}(o',r')$. Wówczas $|oo'| \leqslant |oa| + |o'a| \leqslant r + r' < |oo'|$, co jest niemożliwe.

(ii) Załóżmy, że $r + r' = |oo'|$. Istnieje na odcinku $\overline{oo'}$ punkt p taki, że $|op| = r$ oraz $|o'p| = r'$. Przypuśćmy, że punkt a inny niż punkt p leży jednocześnie w kołach domkniętych $\overline{K}(o,r)$ oraz $\overline{K}(o',r')$. Wówczas $|oo'| \leqslant |oa| + |o'a| \leqslant |oa| + r' \leqslant r + r' = |oo'|$, więc $|oa| = r$ oraz

$|o'a| = r'$. Ponieważ otrzymaliśmy równość w nierówności trójkąta, więc mamy także $B(oao')$ oraz $a = p$, sprzeczność.

(iii) Załóżmy, że $|r - r'| < |oo'| < r + r'$. Weźmy punkt a na półprostej $\overrightarrow{o'o}$ taki, że $|o'a| = r'$, oraz punkt b na półprostej $\overrightarrow{o'o}^*$ taki, że $|o'b| = r'$. Wówczas $|bo| = |oo'| + |o'b| = |oo'| + r' > r$, więc punkt b leży na zewnątrz okręgu O. W przypadku $B(o'ao)$ zachodzi $|ao| = |oo'| - |o'a| = |oo'| - r' < r$, zaś w przypadku $B(o'oa)$ zachodzi $|ao| = |ao'| - |oo'| = r' - |oo'| < r$. Zatem punkt a leży wewnątrz okręgu O.

(iv) Załóżmy, że $0 < r - r' = |oo'|$. Istnieje punkt p taki, że $|op| = r$, $|o'p| = r'$ oraz zachodzi $B(oo'p)$. Ustalmy punkt a inny niż punkt p leżący w kole domkniętym $\overline{K}(o', r')$. Wówczas albo $|oa| < r$ albo $r \leqslant |oa| \leqslant |o'a| + |oo'| \leqslant r' + |oo'| = r$, a w tym drugim przypadku $a = p$, co jest niemożliwe. Zatem a leży w kole otwartym $K(o, r)$.

(v) Załóżmy, że $|oo'| < r - r'$. Wówczas dla dowolnego punktu a w kole domkniętym $\overline{K}(o', r')$ zachodzi $|oa| \leqslant |o'a| + |oo'| \leqslant r' + |oo'| < r$.

□

Zadania. Udowodnij.

1. Jeśli $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$, to istnieje trójkąt o bokach a, b, c.
2. Dane są okręgi O, O' oraz punkty x, y na okręgu O', przy czym x leży wewnątrz okręgu O, a y leży na zewnątrz okręgu O. Wówczas istnieją dokładnie dwa punkty wspólne okręgów O, O' i leżą one po różnych stronach prostej $\overleftrightarrow{xy}$.

Rozdział 5

Geometria euklidesowa

W tym rozdziale zakładamy wszystkie wprowadzone dotychczas aksjomaty: incydencji wraz z pewnikiem Euklidesa, uporządkowania wraz z aksjomatem ciągłości, a także przystawania.[1]

Relacja równoległości prostych jest równoważnością.

Twierdzenie 5.1. *Jeśli proste L_1 i L_2 są rozłączne oraz przecięte prostą K, to kąty naprzemianległe wewnętrznie (utworzone przez proste L_1 i L_2 przecięte prostą K) są przystające.*

Dowód. Ustalmy proste L_1, L_2 oraz K takie jak w założeniach. Niech a_1 i a_2 będą punktami przecięcia prostej K odpowiednio z prostymi L_1 i L_2. Niech A_1 i A_2 będą półprostymi zawartymi odpowiednio w prostych L_1 i L_2 o początkach odpowiednio w punktach a_1 i a_2, przy czym A_1 i A_2 leżą po różnych stronach prostej K. Na podstawie aksjomatu P3 w półpłaszczyźnie o brzegu K zawierającej półprostą A_2 istnieje półprosta A o początku w punkcie a_2 taka, że $\overrightarrow{a_1a_2}A_1 \equiv \overrightarrow{a_2a_1}A$. Na mocy twierdzenia 3.29 proste $L_1 = L(A_1)$ oraz $L(A)$ są równoległe. Z pewnika Euklidesa dostajemy $L(A) = L_2 = L(A_2)$. Ponieważ półproste A i A_2 leżą po tej samej stronie prostej K, więc $A = A_2$. Zatem $\overrightarrow{a_1a_2}A_1 \equiv \overrightarrow{a_2a_1}A_2$. □

Jako wniosek z twierdzenia 5.1 dostajemy, że jeśli dwie proste są rozłączne oraz przecięte trzecią prostą, to kąty odpowiadające są przystające, kąty

[1] Jest to zestaw aksjomatów, który opisuje geometrię euklidesową w sposób kategoryczny.

naprzemianległe są przystające, zaś suma miar kątów jednostronnych wynosi 180°. Istotnie, wynika to z przystawania kątów wierzchołkowych oraz stąd, że suma miar kątów przyległych wynosi 180°.

Poniższe twierdzenie jest znane jako oryginalne sformułowanie pewnika Euklidesa.

Twierdzenie 5.2. *Jeśli* $\overrightarrow{ab}A, \overrightarrow{ba}B$ *są kątami jednostronnymi wewnętrznie, a ich suma miar jest mniejsza od* $180°$*, to półproste* A *i* B *przecinają się.*

Dowód. Ustalmy półproste A i B (o początkach w punktach odpowiednio a i b) takie jak w założeniach. Przypuśćmy, że półproste A i B się nie przecinają. Wówczas możliwe są dwa przypadki:

(a) Półproste A^* i B^* przecinają się w punkcie c. Wówczas z twierdzenia o kącie zewnętrznym jest $\angle abc < \overrightarrow{ab}A$, a więc

$$180° = |\angle abc| + |\overrightarrow{ba}B| < |\overrightarrow{ab}A| + |\overrightarrow{ba}B| < 180°,$$

co jest niemożliwe.

(b) Proste $L(A)$ oraz $L(B)$ są równoległe. Wówczas z twierdzenia 5.1 wnioskujemy, że $|\overrightarrow{ab}A| + |\overrightarrow{ba}B| = 180°$, co jest sprzeczne z założeniem.

□

Twierdzenie 5.3. *Suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie jest równa* $180°$*.*

Dowód. Ustalmy trójkąt $\triangle abc$. Przez punkt c poprowadźmy prostą L równoległą do prostej $\overleftrightarrow{ab}$. Oznaczmy przez A tę półprostą o początku w punkcie c, która leży po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{bc}$, co punkt a. Kąty $\angle cba$ oraz $A^*\overrightarrow{cb}$ są naprzemianległe wewnętrznie (utworzone przez proste L i $\overleftrightarrow{ab}$ przecięte prostą $\overleftrightarrow{bc}$). Biorąc punkt d na półprostej A, $\square abcd$ będzie czworokątem wypukłym na mocy twierdzenia 2.23. Stąd wynika, że $\overrightarrow{ca}A$ i $\angle cab$ są kątami naprzemianległymi wewnętrznie (utworzonymi przez proste L i $\overleftrightarrow{ab}$ przecięte prostą $\overleftrightarrow{ac}$), a ponadto $\overrightarrow{cb} - \overrightarrow{ca} - A$. Wobec przystawanie kątów naprzemianległych mamy

$$|\angle abc| + |\angle bac| + |\angle acb| = |A^*\overrightarrow{cb}| + |A\overrightarrow{ca}| + |\angle acb| = |A^*\overrightarrow{cb}| + |A\overrightarrow{cb}| = 180°.$$

□

Twierdzenie 5.4. *Dany jest czworokąt wypukły $\square abcd$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) $\square abcd$ *jest równoległobokiem.*

(ii) $ab \equiv cd$ *oraz* $\overleftrightarrow{ab} \parallel cd$.

(iii) $ab \equiv cd$ *oraz* $bc \equiv da$.

Dowód. Ustalmy czworokąt wypukły $\square abcd$.

Jeśli $\square abcd$ jest równoległobokiem, to na mocy twierdzenia 5.1 mamy $\angle abd \equiv cdb$ oraz $\angle adb \equiv \angle cbd$ i na podstawie cechy przystawania k-b-k jest $\triangle abd \equiv \triangle cdb$.

Jeśli $ab \equiv cd$ oraz $\overleftrightarrow{ab} \parallel cd$, to na mocy twierdzenia 5.1 mamy $\angle abd \equiv cdb$ i na podstawie cechy przystawania b-k-b jest $\triangle abd \equiv \triangle cdb$, co pociąga także $\overleftrightarrow{bc} \parallel \overleftrightarrow{da}$.

Jeśli $ab \equiv cd$ oraz $bc \equiv da$, to na podstawie cechy przystawania b-b-b jest $\triangle abd \equiv \triangle cdb$, co pociąga $\overleftrightarrow{ab} \parallel \overleftrightarrow{cd}$ oraz $\overleftrightarrow{bc} \parallel da$. $\square$

Twierdzenie 5.5. *Jeśli AB, $A'B'$ są kątami takimi, że $A \parallel A'$, $B \parallel B'$, to $AB \equiv A'B'$.*

Dowód. Ustalmy półproste A, B, A', B' takie jak w założeniach.

Gdy $L(A) = L(A')$, to półproste A, A' są zgodnie zorientowane, a półproste B, B' leżą po tej samej stronie prostej $L(A) = L(A')$ i wówczas kąty AB, $A'B'$ są odpowiadające utworzone przez proste równoległe. Gdy $L(B) = L(B')$, dowód jest analogiczny.

W przypadku ogólnym z pewnika Euklidesa wynika, że półproste B oraz A' przecinają się w pewnym punkcie o. Niech A'_o będzie półprostą o początku w punkcie o zgodnie zorientowaną z półprostą A' i niech B_o będzie półprostą o początku o zgodnie zorientowaną z półprostą B. Na podstawie udowodnionej części mamy

$$AB \equiv A'_o B_o \equiv A'B'.$$

$\square$

Zadania. Udowodnij.

1. Czworokąt wypukły jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy jego przekątne dzielą się na połowy.
2. Symetralne boków w dowolnym trójkącie przecinają się w jednym punkcie.
3. Każdy czworokąt Saccheriego i każdy czworokąt Lamberta są prostokątami.
4. Odległość między prostymi równoległymi jest stała (odległość dowolnego punktu jednej prostej od drugiej prostej nie zależy od wyboru tego punktu).
5. Zbiór punktów jednakowo odległych od prostej L jest sumą dwóch prostych (równoległych i leżących po różnych stronach L).

5.1 Twierdzenie Talesa i cechy podobieństwa

Twierdzenie 5.6. *Dane są proste L, L^* oraz prosta K, która nie jest równoległa ani do L, ani do L^*. Wówczas rzutowanie równoległe $f\colon L \to L^*$ w kierunku prostej K przenosi odcinki przystające na odcinki przystające.*

Dowód. Ustalmy proste L, L^* oraz K takie jak w założeniach. Niech a, b, a_1, b_1 będą punktami na prostej L takimi, że $ab \equiv a_1b_1$.

Jeśli $L \parallel L^*$, to czworokąty $\square abf(b)f(a)$ oraz $\square a_1b_1f(b_1)f(a_1)$ są równoległobokami i wobec twierdzenia 5.4 zachodzi

$$f(a)f(b) \equiv ab \equiv a_1b_1 \equiv f(a_1)f(b_1).$$

Załóżmy, że proste L oraz L^* przecinają się w dokładnie jednym punkcie o. Oznaczmy przez K_a, K_b, K_{a_1}, K_{b_1} proste równoległe do prostej K przechodzące odpowiednio przez punkty a, b, a_1, b_1. Możemy bez straty ogólności założyć, że półproste $\overrightarrow{ab}$ oraz $\overrightarrow{a_1b_1}$ są zgodnie zorientowane. Prosta równoległa do prostej L przechodząca przez punkt $f(b)$ przetnie prostą K_a w pewnym punkcie c, zaś prosta równoległa do prostej L przechodząca przez punkt $f(b_1)$ przetnie prostą K_{a_1} w pewnym punkcie c_1. Wówczas czworokąty $\square acf(b)b$ oraz $\square a_1c_1f(b_1)b_1$ są równoległobokami, a więc

$$\overrightarrow{cf(b)} \parallel \overrightarrow{ab} \parallel \overrightarrow{a_1b_1} \parallel \overrightarrow{c_1f(b_1)}$$

oraz

$$cf(b) \equiv ab \equiv a_1b_1 \equiv c_1f(b_1).$$

Na podstawie twierdzenia 5.4 czworokąt $\square cf(b)f(b_1)c_1$ jest równoległobokiem, a więc $\overleftrightarrow{cc_1} \parallel L^*$ i czworokąt $\square cf(a)f(a_1)c_1$ też jest równoległobokiem. Stąd $\overrightarrow{cf(a)} \parallel \overrightarrow{c_1f(a_1)}$ i na podstawie twierdzenia 5.5 mamy $\angle f(a)cf(b) \equiv \angle f(a_1)c_1f(b_1)$. Na mocy cechy przystawania b-k-b jest $\triangle f(a)cf(b) \equiv \triangle f(a_1)c_1f(b_1)$, co dowodzi $f(a)f(b) \equiv f(a_1)f(b_1)$. $\square$

Twierdzenie 5.7. *Dane są proste L, L^* oraz prosta K, która nie jest równoległa ani do L, ani do L^*. Na prostej L leżą punkty a, b, c, d takie, że odcinki ab i cd są współmierne tzn. iloraz $\frac{|ab|}{|cd|}$ jest liczbą wymierną. Wówczas*

$$\frac{|ab|}{|cd|} = \frac{|f(a)f(b)|}{|f(c)f(d)|},$$

gdzie $f\colon L \to L^*$ jest rzutowaniem równoległym w kierunku prostej K.

Dowód. Ustalmy proste L, L^*, K oraz punkty a, b, c, d takie jak w założeniach. Niech $\frac{|ab|}{|cd|} = \frac{n}{m}$, gdzie n i m są liczbami naturalnymi. Oznaczmy $x := \frac{|ab|}{n} = \frac{|cd|}{m}$ oraz niech $y = |f(p)f(q)|$ dla każdego odcinka pq na prostej L o długości x (na mocy twierdzenia 5.6 wartość y nie zależy od wyboru odcinka pq). Dzielimy odcinek ab na n równych części punktami $a = e_0, e_1, \ldots, e_n = b$. Na mocy twierdzenia 5.6 odcinek $f(a)f(b)$ jest podzielony na n równych części punktami $f(a) = f(e_0), f(e_1), \ldots, f(e_n) = f(b)$. Stąd $|f(a)f(b)| = n|f(e_0)f(e_1)| = ny$. Postępując podobnie z odcinkiem cd, dostajemy $|f(c)f(d)| = my$. Zatem

$$\frac{|f(a)f(b)|}{|f(c)f(d)|} = \frac{ny}{my} = \frac{n}{m} = \frac{|ab|}{|cd|}.$$

$\square$

Twierdzenie 5.8 (Talesa)**.** *Dane są proste L, L^* oraz prosta K, która nie jest równoległa ani do L, ani do L^*. Na prostej L leżą odcinki ab oraz cd. Wówczas*

$$\frac{|ab|}{|cd|} = \frac{|f(a)f(b)|}{|f(c)f(d)|},$$

gdzie $f\colon L \to L^*$ jest rzutowaniem równoległym w kierunku prostej K.

Dowód. Ustalmy proste L, L^*, K oraz punkty a, b, c, d takie jak w założeniach. Znajdźmy ciąg $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb wymiernych mniejszych od $\frac{|ab|}{|cd|}$, który jest zbieżny do $\frac{|ab|}{|cd|}$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $r_n|cd| < |ab|$, więc istnieje punkt $e_n \in \overline{ab}$ taki, że $|ae_n| = r_n|cd|$. Wówczas odcinki ae_n oraz cd są współmierne, więc na podstawie twierdzenia 5.7 zachodzi

$$\frac{|f(a)f(e_n)|}{|f(c)f(d)|} = \frac{|ae_n|}{|cd|} = r_n.$$

Ponieważ rzutowanie równoległe zachowuje relację leżenia między, dostajemy $f(e_n) \in \overline{f(a)f(b)}$, czyli $|f(a)f(e_n)| < |f(a)f(b)|$. Stąd

$$r_n = \frac{|f(a)f(e_n)|}{|f(c)f(d)|} < \frac{|f(a)f(b)|}{|f(c)f(d)|}.$$

Przechodząc do granicy przy $n \to \infty$ dostajemy

$$\frac{|ab|}{|cd|} \leqslant \frac{|f(a)f(b)|}{|f(c)f(d)|}.$$

Dowód nierówności przeciwnej jest analogiczny. $\square$

Twierdzenie 5.9. *Dane są proste L oraz L' które przecinają się w punkcie o. Na prostej L leżą punkty a i b (różne od punktu o), a na prostej L' punkty a' i b' (różne od punktu o). Jeśli proste $\overleftrightarrow{aa'}$, $\overleftrightarrow{bb'}$ są równoległe, to*

$$\frac{|oa|}{|ob|} = \frac{|oa'|}{|ob'|} = \frac{|aa'|}{|bb'|}.$$

Dowód. Ustalmy proste L i L' oraz punkty o, a, b, a', b' takie jak w założeniach. Równość $\frac{|oa|}{|ob|} = \frac{|oa'|}{|ob'|}$ wynika wprost z twierdzenia Talesa. Na mocy pewnika Euklidesa prosta równoległa do prostej L przechodząca przez punkt a' przecina prostą $\overleftrightarrow{bb'}$ w pewnym punkcie c. Czworokąt $\square aa'cb$ jest równoległobokiem, więc $aa' \equiv bc$. Stosując twierdzenie Talesa do prostych L' i $\overleftrightarrow{bb'}$ i rzutowania w kierunku prostej L, dostajemy

$$\frac{|oa'|}{|ob'|} = \frac{|bc|}{|bb'|} = \frac{|aa'|}{|bb'|}.$$

$\square$

Twierdzenie 5.10 (Odwrotne do Talesa)**.** *Dane są proste L oraz L' które przecinają się w punkcie o. Na prostej L leżą punkty a i b (różne od punktu o), a na prostej L' punkty a' i b' (różne od punktu o). Zachodzi równość $\frac{|oa|}{|ob|} = \frac{|oa'|}{|ob'|}$ oraz jeden z warunków:*

- $\neg B(aob)$, $\neg B(a'ob')$.
- $B(aob)$, $B(a'ob')$.

Wówczas proste $\overleftrightarrow{aa'}$ *i* $\overleftrightarrow{bb'}$ *są równoległe.*

Dowód. Ustalmy proste L i L' oraz punkty o, a, b, a', b' takie jak w założeniach. Prosta równoległa do prostej $\overleftrightarrow{aa'}$ przechodząca przez punkt b' przecina prostą L w pewnym punkcie b_1. Na podstawie twierdzenia 5.9 mamy

$$\frac{|oa|}{|ob_1|} = \frac{|oa'|}{|ob'|} = \frac{|oa|}{|ob|}.$$

Stąd $ob_1 \equiv ob$. Ponadto, ponieważ rzutowanie równoległe zachowuje relację leżenia między, z drugiego założenia wynika, że punkty b i b_1 leżą na tej samej półprostej o początku w punkcie o. Na podstawie aksjomatu P2 dostajemy $b = b_1$. □

Twierdzenie 5.11. *Dane są różne punkty* o, a, b, a', b, *gdzie punkty* o, a, b *są współliniowe leżące na prostej* L, *zaś* a' *i* b' *leżą poza prostą* L. *Proste* $\overleftrightarrow{aa'}$ *i* $\overleftrightarrow{bb'}$ *są równoległe oraz*

$$\frac{|oa|}{|ob|} = \frac{|aa'|}{|bb'|},$$

przy czym zachodzi jeden z następujących warunków.

- *Punkty* a *i* b *leżą na tej samej półprostej o początku w punkcie* o, *a punkty* a' *i* b' *leżą po tej samej stronie prostej* L.
- *Punkty* a *i* b *leżą na różnych półprostych o początku w punkcie* o, *a punkty* a' *i* b' *leżą po różnych stronach prostej* L.

Wówczas punkty o, a', b' *są współliniowe.*

Dowód. Ustalmy punkty o, a, b, a', b oraz prostą L takie jak w założeniach. Prosta równoległa do prostej $\overleftrightarrow{aa'}$ przechodząca przez punkt b przecina prostą $\overleftrightarrow{oa'}$ w pewnym punkcie b^*. Na podstawie twierdzenia 5.9 mamy

$$\frac{|aa'|}{|bb^*|} = \frac{|oa|}{|ob|} = \frac{|aa'|}{|bb'|}.$$

Stąd $bb^* \equiv bb'$. Z drugiego założenia wynika z kolei, że punkty b^* i b' leżą po tej samej stronie prostej L, a więc na tej samej półprostej o początku w punkcie b. Na podstawie aksjomatu P2 dostajemy $b' = b^*$. □

Trójkąty $\triangle abc$ oraz $\triangle a_1b_1c_1$ nazywamy *podobnymi*, co zapisujemy $\triangle abc \sim \triangle a_1b_1c_1$, gdy $\angle abc \equiv \angle a_1b_1c_1$, $\angle bac \equiv \angle b_1a_1c_1$, $\angle acb \equiv \angle a_1c_1b_1$ oraz

$$\frac{|ab|}{|a_1b_1|} = \frac{|bc|}{|b_1c_1|} = \frac{|ac|}{|a_1c_1|}.$$

Na mocy twierdzenia 4.12 definicja nie zależy od wyboru miary odcinków.

Twierdzenie 5.12 (Cecha podobieństwa k-k)**.** *Dane są punkty niewspółliniowe a, b, c oraz punkty niewspółliniowe a_1, b_1, c_1. Jeśli $\angle abc \equiv \angle a_1b_1c_1$ oraz $\angle bac \equiv \angle b_1a_1c_1$, to $\triangle abc \sim \triangle a_1b_1c_1$.*

Dowód. Ustalmy punkty a, b, c, a_1, b_1, c_1 takie jak w założeniach. Z twierdzenia o sumie miar kątów w trójkącie wynika $\angle acb \equiv \angle a_1c_1b_1$. Na półprostej $\overrightarrow{ab}$ istnieje punkt b' taki, że $ab' \equiv a_1b_1$, a na półprostej $\overrightarrow{ac}$ istnieje punkt c' taki, że $ac' \equiv a_1c_1$. Ponieważ $\angle b_1a_1c_1 \equiv \angle bac = \angle b'ac'$, więc na mocy cechy przystawania b-k-b dostajemy $\triangle ab'c' \equiv \triangle a_1b_1c_1$. Z przystawania wynika $\angle ab'c' \equiv \angle a_1b_1c_1 \equiv \angle abc$, a kąty $\angle ab'c'$ i $\angle abc$ są odpowiadające (utworzone przez proste $\overleftrightarrow{bc}$ i $\overleftrightarrow{b'c'}$ przecięte prostą $\overleftrightarrow{ab}$). Na podstawie twierdzenia 3.29 proste $\overleftrightarrow{bc}$ i $\overleftrightarrow{b'c'}$ są równoległe, a więc z twierdzenia 5.9 mamy

$$\frac{|ab'|}{|ab|} = \frac{|ac'|}{|ac|} = \frac{|b'c'|}{|bc|}$$

oraz $\triangle abc \sim \triangle ab'c' \equiv \triangle a_1b_1c_1$. □

Twierdzenie 5.13 (Cecha podobieństwa b-k-b)**.** *Dane są punkty niewspółliniowe a, b, c oraz punkty niewspółliniowe a_1, b_1, c_1. Jeśli $\frac{|ab|}{|a_1b_1|} = \frac{|ac|}{|a_1c_1|}$ oraz $\angle bac \equiv \angle b_1a_1c_1$, to $\triangle abc \sim \triangle a_1b_1c_1$.*

Dowód. Ustalmy punkty a, b, c, a_1, b_1, c_1 takie jak w założeniach. Na półprostej $\overrightarrow{ab}$ istnieje punkt b' taki, że $ab' \equiv a_1b_1$, a na półprostej $\overrightarrow{ac}$ istnieje punkt c' taki, że $ac' \equiv a_1c_1$. Ponieważ $\angle b_1a_1c_1 \equiv \angle bac = \angle b'ac'$, więc na mocy cechy przystawania b-k-b dostajemy $\triangle ab'c' \equiv \triangle a_1b_1c_1$. Mamy

$$\frac{|ab|}{|ab'|} = \frac{|ab|}{|a_1b_1|} = \frac{|ac|}{|a_1c_1|} = \frac{|ac|}{|ac'|}.$$

Spełnione są założenia twierdzenia 5.10, więc proste $\overleftrightarrow{bc}$ oraz $\overleftrightarrow{b'c'}$ są równoległe, a kąty odpowiadające $\angle abc$ i $\angle ab'c'$ są przystające. Na podstawie cechy podobieństwa k-k dostajemy $\triangle abc \sim \triangle ab'c' \equiv \triangle a_1b_1c_1$. □

Twierdzenie 5.14 (Cecha podobieństwa b-b-b). *Dane są punkty niewspółliniowe a, b, c oraz punkty niewspółliniowe a_1, b_1, c_1. Jeśli*

$$\frac{|ab|}{|a_1b_1|} = \frac{|bc|}{|b_1c_1|} = \frac{|ac|}{|a_1c_1|},$$

to $\triangle abc \sim \triangle a_1b_1c_1$.

Dowód. Ustalmy punkty a, b, c, a_1, b_1, c_1 takie jak w założeniach. Na półprostej $\overrightarrow{ab}$ istnieje punkt b' taki, że $ab' \equiv a_1b_1$, a na półprostej $\overrightarrow{ac}$ istnieje punkt c' taki, że $ac' \equiv a_1c_1$. Mamy

$$\frac{|ab|}{|ab'|} = \frac{|ab|}{|a_1b_1|} = \frac{|ac|}{|a_1c_1|} = \frac{|ac|}{|ac'|}.$$

Spełnione są założenia twierdzenia 5.10, więc proste $\overleftrightarrow{bc}$ oraz $\overleftrightarrow{b'c'}$ są równoległe, a kąty odpowiadające $\angle abc$ i $\angle ab'c'$ są przystające. Na podstawie cechy podobieństwa k-k dostajemy $\triangle abc \sim \triangle ab'c'$. Z podobieństwa i założenia wynika

$$\frac{|bc|}{|b'c'|} = \frac{|ab|}{|ab'|} = \frac{|ab|}{|a_1b_1|} = \frac{|bc|}{|b_1c_1|}.$$

Stąd $b'c' \equiv b_1c_1$ i na podstawie cechy przystawania b-b-b dostajemy $\triangle a_1b_1c_1 \equiv \triangle ab'c' \sim \triangle abc$. □

Zadania. Udowodnij.

1. Dane są trójkąty podobne $\triangle abc$ oraz $\triangle a_1b_1c_1$. Wówczas trójkąty $\triangle abd$ oraz $\triangle a_1b_1d_1$ są podobne, gdzie punkt d jest środkiem odcinka bc, a punkt d_1 jest środkiem odcinka b_1c_1.

2. Dane są punkty niewspółliniowe a, b, c. Punkty a_1 i b_1 są spodkami wysokości trójkąta $\triangle abc$ opuszczonych z wierzchołków odpowiednio a i b. Wówczas $|aa_1| \cdot |bc| = |bb_1| \cdot |ac|$.[2]

5.2 Twierdzenie Pitagorasa i układ współrzędnych

Twierdzenie 5.15 (Pitagorasa). *Jeśli $\triangle abc$ jest trójkątem takim, że $\angle acb$ jest kątem prostym, to $|ab|^2 = |bc|^2 + |ac|^2$.*

[2]Równość ta mówi między innymi, że definicja pola trójkąta nie zależy od wyboru podstawy i wysokości.

Dowód. Ustalmy punkty a, b, c takie jak w założeniach. Niech p będzie rzutem prostopadłym punktu c na prostą $\overleftrightarrow{ab}$. Wówczas $B(apb)$, $\angle cab = \angle cap$ oraz $\angle cba = \angle cbp$. Na mocy cechy podobieństwa k-k zachodzi $\triangle cap \sim \triangle bac \sim \triangle bcp$. Z podobieństwa wynika $\frac{|ap|}{|ac|} = \frac{|ac|}{|ab|}$ oraz $\frac{|bp|}{|bc|} = \frac{|bc|}{|ab|}$. Zatem

$$|ac|^2 + |bc|^2 = (|ap| + |bp|)|ab| = |ab|^2.$$

$\square$

Gdy $|\cdot|$ jest miarą odcinków, a półproste A i B są takie, że AB jest kątem prostym o wierzchołku o, to *układem współrzędnych* (wyznaczonym przez tę miarę i kąt skierowany (A, B)) nazywamy funkcję $\Phi\colon \mathbb{P} \to \mathbb{R}^2$ taką, że $\Phi = (f_1, f_2)$, gdzie

$$f_1(a) = \begin{cases} |op| & \text{, gdy } p \in A, \\ 0 & \text{, gdy } p = o, \\ -|op| & \text{, gdy } p \in A^*, \end{cases}$$

$$f_2(a) = \begin{cases} |oq| & \text{, gdy } q \in B, \\ 0 & \text{, gdy } q = o, \\ -|oq| & \text{, gdy } q \in B^*, \end{cases}$$

, przy czym p i q są rzutami prostopadłymi punktu a na proste odpowiednio $L(A)$ i $L(B)$.

Twierdzenie 5.16. *Układ współrzędnych jest bijekcją między płaszczyzną i* $\mathbb{R}^2$.

Dowód. Ustalmy układ współrzędnych Φ wyznaczony przez miarę odcinków $|\cdot|$ i kąt skierowany (A, B). Sprawdzenie, że Φ jest funkcją różnowartościową, pozostawiamy czytelnikowi. Dla dowodu, że jest ona suriekcją, ustalmy $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Na prostej $L(A)$ znajdujemy punkt p według następujących przypadków:

(a) Jeśli $x > 0$, to p leży na półprostej A oraz $|op| = x$.

(b) Jeśli $x = 0$, to $p = o$.

(c) Jeśli $x < 0$, to p leży na półprostej A^* oraz $|op| = -x$.

Postępując analogicznie z półprostą B oraz liczbą $y \in \mathbb{R}$, znajdujemy punkt q na prostej $L(B)$. Przez punkt p prowadzimy prostą L prostopadłą do $L(A)$, a przez punkt q prostą K prostopadłą do $L(B)$. Wówczas proste L i K przecinają się w dokładnie jednym punkcie a, gdyż gdyby $L \parallel K$, to $L(A) \parallel K \parallel L \parallel L(B)$, co daje sprzeczność. Zachodzi $\Phi(a) = (x, y)$. $\square$

Twierdzenie 5.17. *Dany jest układ współrzędnych* Φ *oraz punkty* a *i* b. *Wówczas*

$$|ab| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2},$$

gdzie $\Phi(a) = (x_a, y_a)$ *i* $\Phi(b) = (x_b, y_b)$.

Dowód. Ustalmy układ współrzędnych Φ (wyznaczony przez miarę odcinków $|\cdot|$ i kąt skierowany (A, B)) oraz punkty a i b. Przez punkt a prowadzimy prostą L równoległą do prostej $L(A)$, a przez punkt b prowadzimy prostą K równoległą do $L(B)$. Proste L i K przecinają się w pewnym punkcie c. Wówczas czworokąty $\square p_b p_a ac$ oraz $\square q_a q_b bc$ są prostokątami, gdzie p_a i p_b to rzuty prostopadłe odpowiednio punktów a i b na prostą $L(A)$, natomiast q_a i q_b to rzuty prostopadłe odpowiednio punktów a i b na prostą $L(B)$. Rozważmy następujące przypadki:

(a) $b = c$. Wówczas $y_a = y_b$ oraz

$$|ab| = |ac| = |p_b p_a| = |x_b - x_a| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}.$$

(b) $a = c$. Wówczas $x_a = x_b$ i rozumujemy analogicznie.

(c) Punkty a, b, c są niewspółliniowe. Wówczas z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie $\triangle abc$ mamy

$$|ab|^2 = |ac|^2 + |bc|^2 = |p_a p_b|^2 + |q_a q_b|^2 = (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2.$$

$\square$

Uwaga. Wzór na odległość w twierdzeniu 5.17 oznacza, że funkcja Φ jest wzajemnie jednoznaczną izometrią między płaszczyzną $\mathbb{P}$ oraz płaszczyzną euklidesową $\mathbb{R}^2$ (która jest modelem geometrii). Ponieważ każda izometria zachowuje przystawanie kątów, relację leżenia między oraz współliniowość, dostajemy jako wniosek, że dowolny model geometrii euklidesowej jest izomorficzny z $\mathbb{R}^2$.

Zadania. Udowodnij.

1. Jeśli w trójkącie zachodzi równość $|ab|^2 = |ac|^2 + |bc|^2$, to trójkąt jest prostokątny (twierdzenie odwrotne do Pitagorasa).

5.3 Trygonometria

Sinusem kąta swobodnego ostrego $\mathfrak{A}$ nazywamy stosunek $\sin\mathfrak{A} = \frac{|bc|}{|ab|}$, gdzie $\triangle abc$ jest trójkątem prostokątnym takim, że $[\angle bac] = \mathfrak{A}$. Z pewnika Euklidesa wynika, że taki trójkąt zawsze istnieje. Z cechy podobieństwa k-k wynika, że wszystkie takie trójkąty są podobne, a więc sinus nie zależy od ich wyboru. Z twierdzenia 4.12 wynika ponadto, że sinus nie zależy też od wyboru miary odcinków. Zgodnie ze znanym wzorem redukcyjnym określamy sinus kąta swobodnego rozwartego $\mathfrak{A}$ jako sinus kąta do niego przyległego $\mathfrak{A}^*$, zaś sinus kąta swobodnego prostego definiujemy jako 1.

Możemy też w naturalny sposób jednoznacznie określić sinus (związanego) kąta oraz wobec twierdzenia 4.22 sinus dowolnej liczby $x \in (0, 180^\circ)$ (jako sinus kąta o mierze równej x). Symbol sin jest wobec tego stosowany również dla kątów związanym oraz liczb.

Pozostałe funkcje trygonometryczne wprowadzamy standardowo. Jeśli $\triangle abc$ jest trójkątem prostokątnym takim, że $[\angle bac] = \mathfrak{A}$, to *cosinusem* kąta $\mathfrak{A}$ nazywamy stosunek $\cos\mathfrak{A} = \frac{|ac|}{|ab|}$, *tangensem* kąta $\mathfrak{A}$ nazywamy stosunek $\operatorname{tg}\mathfrak{A} = \frac{|bc|}{|ac|}$, a *cotangensem* kąta $\mathfrak{A}$ nazywamy stosunek $\operatorname{ctg}\mathfrak{A} = \frac{|ac|}{|bc|}$.[3] Gdy $\mathfrak{A}$ jest kątem swobodnym rozwartym, to określamy $\cos\mathfrak{A} = -\cos\mathfrak{A}^*$, $\operatorname{tg}\mathfrak{A} = -\operatorname{tg}\mathfrak{A}^*$ oraz $\operatorname{ctg}\mathfrak{A} = -\operatorname{ctg}\mathfrak{A}^*$. Cosinus i cotangens kąta prostego wynoszą 0, zaś tangens kąta prostego jest niezdefiniowany.

Uwagi dotyczące istnienia i jednoznaczności sinusa kątów oraz sinusa liczb rzeczywistych przenoszą się w analogiczny sposób na pozostałe funkcje trygonometryczne.

[3] Pomijamy pozostałe dwie rzadko spotykane funkcje trygonometryczne, czyli sekans i kosekans.

Z definicji wynikają następujące znane wzory redukcyjne[4]:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha,$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha,$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha,$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha,$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha,$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha.$$

Z twierdzenia Pitagorasa wynika natomiast równość

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Twierdzenie 5.18. *Dane są liczby $\alpha, \beta \in (0, 180^\circ)$ takie, że $\alpha + \beta < 180^\circ$. Wówczas*

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta.$$

Dowód. Ustalmy liczby α, β takie jak w założeniach. Istnieją półproste A, B, C takie, że $|AB| = \alpha$, $|BC| = \beta$ oraz $A - B - C$, przy czym punkt o jest początkiem tych półprostych. Rozważmy następujące przypadki.

(a) $\alpha + \beta < 90^\circ$ (tzn. kąt AC jest ostry). Weźmy punkty współliniowe a, b, c odpowiednio na półprostych A, B, C, przy czym kąt $\angle oac$ jest prosty. Niech d będzie rzutem prostopadłym punktu c na prostą $L(B)$. Wówczas zachodzi $B(obd)$ oraz $\triangle oab \sim \triangle cdb$. Mamy

$$\sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta = \sin\angle cod\cos\angle aob + \sin\angle aob\cos\angle cod =$$
$$= \frac{|cd|}{|oc|}\cdot\frac{|oa|}{|ob|} + \frac{|ab|}{|ob|}\cdot\frac{|od|}{|oc|} = \frac{|cd|\cdot|oa| + |ab|\cdot(|ob| + |bd|)}{|ob|\cdot|oc|} =$$
$$= \frac{|ab|}{|oc|} + \frac{|ab|\cdot|bd| + |oa|\cdot|cd|}{|ob|\cdot|oc|} = \frac{|ab|}{|oc|} + \frac{|ab|^2\cdot|bc| + |oa|^2\cdot|bc|}{|ob|^2\cdot|oc|} =$$
$$= \frac{|ab| + |bc|}{|oc|} = \sin\angle aoc = \sin(\alpha + \beta).$$

[4] Przy założeniu, że wszystkie argumenty są w przedziale $(0, 180^\circ)$.

(b) $\alpha + \beta = 90°$ (tzn. kąt AC jest prosty). Wówczas

$$\sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta = \sin(90° - \alpha)\cos\alpha + \sin\alpha\cos(90° - \alpha) =$$

$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 = \sin 90° = \sin(\alpha + \beta).$$

(c) $\alpha + \beta > 90°$ (tzn. kąt AC jest rozwarty), przy czym kąty AB i BC są ostre. Weźmy punkty współliniowe c, d, e odpowiednio na półprostych C, A^*, B^*, przy czym kąty $\angle odc$ oraz $\angle ode$ są proste. Niech ponadto b będzie rzutem prostopadłym punktu c na prostą B. Na mocy cechy podobieństwa k-k zachodzi $\triangle ceb \sim \triangle oed$. Mamy

$$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin\angle bce\cos\angle boc + \cos\angle bce\sin\angle boc =$$

$$= \frac{|be|}{|ce|}\cdot\frac{|ob|}{|oc|} + \frac{|bc|}{|ce|}\cdot\frac{|bc|}{|oc|} = \frac{|be|\cdot|ob| + |bc|^2}{|ce|\cdot|oc|} = \frac{|be|\cdot|ob| + |ce|^2 - |be|^2}{|ce|\cdot|oc|} =$$

$$= \frac{|ce|\cdot(|cd| + |de|) - |be|\cdot(|be| - |ob|)}{|ce|\cdot|oc|} =$$

$$= \frac{|ce|\cdot|cd| + |ce|\cdot|de| - |be|\cdot|oe|}{|ce|\cdot|oc|} =$$

$$= \frac{|ce|\cdot|cd|}{|ce|\cdot|oc|} = \frac{|cd|}{|oc|} = \sin\angle cod = \sin(\alpha + \beta).$$

(d) $\alpha = 90°$ lub $\beta = 90°$. Jeśli $\alpha = 90°$, to

$$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \cos\beta = \sin(90° + \beta) = \sin(\alpha + \beta).$$

Jeśli $\beta = 90°$, dowód jest analogiczny.

(e) $\alpha > 90°$ lub $\beta > 90°$. Załóżmy dla ustalenia uwagi, że $\alpha > 90°$. Weźmy punkty współliniowe b, c, d odpowiednio na półprostych B, C, A^*, przy czym kąt $\angle odb$ jest prosty. Niech e będzie rzutem prostopadłym punktu c na prostą $L(B)$. Wówczas zachodzi $B(oeb)$ oraz na mocy cechy podobieństwa k-k także $\triangle bce \sim \triangle bod$. Mamy

$$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin\angle bce\cos\angle coe - \cos\angle bce\sin\angle coe =$$

$$= \frac{|be|}{|bc|}\cdot\frac{|oe|}{|oc|} - \frac{|ce|}{|bc|}\cdot\frac{|ce|}{|oc|} = \frac{|be|\cdot|oe| - |ce|^2}{|bc|\cdot|oc|} =$$

$$= \frac{|be|\cdot|oe| - |bc|^2 + |be|^2}{|bc|\cdot|oc|} = \frac{|be|\cdot|bo| - |bc|^2}{|bc|\cdot|oc|} = \frac{|bc|\cdot|bd| - |bc|^2}{|bc|\cdot|oc|} =$$

$$= \frac{|bc|\cdot|cd|}{|bc|\cdot|oc|} = \frac{|cd|}{|oc|} = \sin\angle cod = \sin(\alpha + \beta).$$

□

Twierdzenie 5.19. *Dane są liczby $\alpha, \beta \in (0, 180^\circ)$ takie, że $\alpha + \beta < 180^\circ$. Wówczas*

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Dowód. Ustalmy liczby α, β takie jak w założeniach. Rozważmy przypadki:

(a) $\alpha+\beta < 90^\circ$. Wówczas na podstawie wzorów redukcyjnych i twierdzenia 5.18 mamy

$$\cos(\alpha + \beta) = \sin(90^\circ + \alpha + \beta) =$$

$$= \sin(90^\circ + \alpha)\cos\beta + \cos(90^\circ + \alpha)\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

(b) $\alpha + \beta = 90^\circ$. Wówczas

$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha = 0 = \cos(\alpha + \beta).$$

(c) $\alpha+\beta > 90^\circ$. Jedna z liczb α, β jest mniejsza niż 90°. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że $\beta < 90^\circ$. Wówczas na podstawie wzorów redukcyjnych i twierdzenia 5.18 mamy

$$\cos(\alpha + \beta) = -\sin(\alpha + \beta - 90^\circ) = -\sin(270^\circ - \alpha - \beta) =$$

$$= -\sin(180^\circ - \alpha)\cos(90^\circ - \beta) - \cos(180^\circ - \alpha)\sin(90^\circ - \beta) =$$

$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

□

Twierdzenie 5.20 (Cosinusów)**.** *W trójkącie $\triangle abc$ oznaczono długości boków przez $A = |bc|$, $B = |ac|$, $C = |ab|$, oraz kąty przez $\alpha = \angle bac$, $\beta = \angle abc$, $\gamma = \angle acb$. Wówczas zachodzi równość*

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma.$$

Dowód. Ustalmy punkty niewspółliniowe a, b, c i przyjmijmy oznaczenia takie jak w założeniach. Rozważmy przypadki:

(a) Kąt γ jest ostry. Przynajmniej jeden z kątów α, β jest ostry. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że α jest ostry. Wówczas spodek p wysokości opuszczonej z wierzchołka b leży na odcinku $\overline{ac}$ oraz $|cp| = A\cos\gamma$. Z twierdzenia Pitagorasa w trójkątach $\triangle abp$ oraz $\triangle cbp$ dostajemy

$$C^2 = |bp|^2 + |ap|^2 = A^2 - |cp|^2 + (B - |cp|)^2 =$$

$$= A^2 - A^2\cos^2\gamma + B^2 - 2AB\cos\gamma + A^2\cos^2\gamma = A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma.$$

(b) Kąt γ jest prosty. Wówczas teza wynika od razu z twierdzenia Pitagorasa.

(c) Kąt γ jest rozwarty. Wówczas spodek p wysokości opuszczonej z wierzchołka b leży na półprostej $\overrightarrow{ca}^*$ oraz $|cp| = -A\cos\gamma$. Z twierdzenia Pitagorasa w trójkątach $\triangle abp$ oraz $\triangle cbp$ dostajemy

$$C^2 = |bp|^2 + |ap|^2 = A^2 - |cp|^2 + (B + |cp|)^2 =$$

$$= A^2 - A^2\cos^2\gamma + B^2 - 2AB\cos\gamma + A^2\cos^2\gamma = A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma.$$

□

Zadania. Udowodnij.

1. Jeśli $0 < \beta < \alpha < 180°$, to $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$ oraz $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

2. Funkcja sin jest rosnąca na przedziale $(0, 90°]$ oraz malejąca na przedziale $[90°, 0)$. Funkcja cos jest malejąca na przedziale $(0, 180°)$.

5.4 Kąty środkowe i wpisane

Twierdzenie 5.21. *Dane są różne punkty a, b, c leżące na okręgu o środku w punkcie o. Wówczas zachodzą następujące własności.*

(i) Jeśli punkty o i c leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{ab}$, to $|\angle acb| = \frac{1}{2} \cdot |\angle aob|$.

(ii) Jeśli punkt o leży na prostej $\overleftrightarrow{ab}$, to $|\angle acb| = 90°$.

(iii) Jeśli punkty o i c leżą po różnych stronach prostej $\overleftrightarrow{ab}$, to $|\angle acb| = 180° - \frac{1}{2} \cdot |\angle aob|$.

Dowód. Ustalmy punkty o, a, b, c takie jak w założeniach i rozważmy przypadki:

(i) Punkty o i c leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{ab}$. Rozważmy kolejne przypadki:

(a) Punkt o leży we wnętrzu kąta $\angle acb$. Wówczas punkt o leży wewnątrz trójkąta $\triangle acb$. Mamy

$$|\angle aob| = 360° - |\angle aoc| - |\angle boc| =$$

$$= 360° - (180° - 2 \cdot |\angle oca|) - (180° - 2 \cdot |\angle ocb|) = 2 \cdot |\angle acb|.$$

(b) Punkt o leży na prostej $\overleftrightarrow{ac}$. Wówczas

$$|\angle oab| = 180° - |\angle boc| = 180° - (180° - 2 \cdot |\angle bco|) = 2 \cdot |\angle acb|.$$

(c) Punkt o leży na prostej $\overleftrightarrow{bc}$. Przypadek symetryczny do przypadku (b).

(d) Punkty o oraz b leży po różnych stronach prostej $\overleftrightarrow{ac}$. Wówczas $\square abco$ jest czworokątem wypukłym. Mamy

$$|\angle aob| = |\angle aoc| - |\angle boc| = (180° - 2 \cdot |\angle oca|) - (180° - 2 \cdot |\angle ocb|) =$$

$$= 2 \cdot (|\angle ocb| - |\angle oca|) = 2 \cdot |\angle acb|.$$

(e) Punkty o oraz a leżą po różnych stronach prostej $\overleftrightarrow{bc}$. Przypadek symetryczny do przypadku (d).

(ii) Punkt o leży na prostej $\overleftrightarrow{ab}$. Wówczas

$$|\angle acb| = |\angle aco| + |\angle bco| = (90° - \frac{1}{2} \cdot |\angle aoc|) + (90° - \frac{1}{2} \cdot |\angle boc|) =$$

$$= 180° - \frac{1}{2} \cdot (|\angle aoc| + |\angle boc|) = 90°.$$

(iii) Punkty o i c leżą po różnych stronach prostej $\overleftrightarrow{ab}$. Wówczas $\square acbo$ jest czworokątem wypukłym. Mamy

$$|\angle aob| = |\angle aoc| + |\angle boc| = (180° - 2 \cdot |\angle aco|) + (180° - 2 \cdot |\angle bco|) =$$

$$= 2 \cdot (180° - |\angle acb|).$$

$\square$

Jako wniosek z twierdzenia 5.21 otrzymujemy własności, że kąty wpisane oparte na tym samym łuku są przystające oraz suma miar przeciwległych kątów czworokąta wpisanego w okrąg wynosi 180°. Oba te warunki są także wystarczające, aby cztery punkty leżały na jednym okręgu — wynika to z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 5.22. *Dane są różne punkty a i b leżące na okręgu O o środku w punkcie o. Ponadto dany jest punkt c, który nie leży na prostej $\overleftrightarrow{ab}$, oraz kąt α wybrany według następującej reguły:*

(A) Jeśli punkt o leży na prostej $\overleftrightarrow{ab}$, to przyjmujemy $\alpha = 90°$.

(B) Jeśli punkty o i c leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{ab}$, to $\alpha = \frac{1}{2}|\angle aob|$.

(C) Jeśli punkty o i c leżą po różnych stronach prostej $\overleftrightarrow{ab}$, to $\alpha = 180° - \frac{1}{2} \cdot |\angle aob|$.

Wówczas jeśli punkt c leży wewnątrz okręgu O, to $|\angle acb| > \alpha$, natomiast jeśli punkt c leży na zewnątrz okręgu O, to $|\angle acb| < \alpha$.

Dowód. Ustalmy punkty o, a, b, c oraz kąt α takie jak w założeniach. Rozważmy przypadki:

(a) Punkt c leży wewnątrz okręgu O. Wówczas istnieje punkt d leżący na okręgu O taki, że $B(bcd)$. Z twierdzenia 5.21 dostajemy $|\angle adb| = \alpha$. Z twierdzenia o kącie zewnętrznym w trójkącie $\triangle acd$ jest zatem

$$|\angle acb| > |\angle adb| = \alpha.$$

(b) Punkt c leży na zewnątrz okręgu O. Wówczas znajdujemy punkt p na odcinku $\overline{ab}$. Odcinek $\overline{pc}$ przecina okrąg O w pewnym punkcie q, który leży wewnątrz trójkąta $\triangle abc$. Z twierdzenia 5.21 jest $\alpha = |\angle aqb|$, natomiast z twierdzenia o kącie zewnętrznym mamy

$$\alpha = |\angle aqb| = |\angle aqp| + |\angle bqp| > |\angle acq| + |\angle bcq| = \angle acb.$$

$\square$

Twierdzenie 5.23 (Sinusów)**.** *W trójkącie $\triangle abc$ oznaczono kąty $\alpha = \angle bac$, $\beta = \angle abc$, $\gamma = \angle acb$. Wówczas zachodzą równości*

$$\frac{|bc|}{\sin\alpha} = \frac{|ac|}{\sin\beta} = \frac{|ab|}{\sin\gamma} = 2R,$$

gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie $\triangle abc$.

Dowód. Ustalmy punkty niewspółliniowe a, b, c i przyjmijmy oznaczenia takie jak w założeniach. Ze względu na symetrię wystarczy wykazać, że $\frac{|ab|}{\sin\gamma} = 2R$. Oznaczmy przez o środek okręgu O opisanego na trójkącie $\triangle abc$. Rozważmy przypadki:

(a) Kąt γ jest ostry. Wówczas punkty o i c leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{ab}$. Istnieje punkt d leżący na okręgu O taki, że $B(aod)$. Na podstawie twierdzenia 5.21 jest $\angle acb \equiv \angle adb$, zaś $\angle abd$ jest kątem prostym. Zatem

$$\sin\gamma = \sin\angle acb = \sin\angle adb = \frac{|ab|}{|ad|} = \frac{|ab|}{2R}.$$

(b) Kąt γ jest prosty. Wówczas odcinek ab jest średnicą okręgu O oraz

$$\sin\gamma = 1 = \frac{|ab|}{2R}.$$

(c) Kąt γ jest rozwarty. Wówczas punkty o i c leżą po różnych stronach prostej $\overleftrightarrow{ab}$. Istnieje punkt d leżący na okręgu O taki, że $B(aod)$. Na podstawie twierdzenia 5.21 jest $|\angle acb| + |\angle adb| = 180°$, zaś $\angle abd$ jest kątem prostym. Zatem

$$\sin\gamma = \sin(180° - \gamma) = \sin\angle adb = \frac{|ab|}{|ad|} = \frac{|ab|}{2R}.$$

□

Zadania. Udowodnij.

1. Dane są punkty a, b, c, d takie, że c i d leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{ab}$. Jeśli $|\angle acb| = |\angle adb|$, to punkty a, b, c, d leżą na jednym okręgu.

2. Dane są punkty a, b, c, d takie, że c i d leżą po różnych stronach prostej $\overleftrightarrow{ab}$. Jeśli $|\angle acb| + |\angle adb| = 180°$, to punkty a, b, c, d leżą na jednym okręgu.

3. Na trójkącie $\triangle abc$ opisano okrąg o środku w punkcie o. Wówczas kąt $\angle acb$ jest ostry wtedy i tylko wtedy, gdy punkty o i c leżą po tej samej stronie prostej $\overleftrightarrow{ab}$.